Μαθηματικά

για την Α' Δέσμη

- θέματα μεθοδικά λυμένα
- προτεινόμενα θέματα

εξετάσεις 95

Θ. Ν. Καζαντζής
Γ. Λ. Μαυρίδης
Ελένη Μήτσιου



Θεσσαλονίκη

Θέματα

επανάληψη

εκδόσεις: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ   Χ. Βαφειάδης

Μαθηματικά
για την Α' Δέσμη

- θέματα μεθοδικά λυμένα
- προτεινόμενα θέματα

εξετάσεις 95

Θ. Ν. Καζαντζής
Γ. Λ. Μαυρίδης
Ελένη Μήτσιου



Θεσσαλονίκη

Θέματα

επανάληψη

εκδόσεις: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ Χ. Βαφειάδης



Πρόλογος του εκδότη

Το τρίτο βιβλίο της σειράς "εξετάσεις" είναι πια στα χέρια σας. Αποτελεί συνέχεια των προηγουμένων...

- "εξετάσεις '93" Διαγωνίσματα - επανάληψη
- "εξετάσεις '94" Προβλήματα - επανάληψη

Είναι ταυόχρονα ένα πλήρες, αυτοδύναμο βιβλίο για την επανάληψη των υποψηφίων της Α' ΔΕΣΜΗΣ.

Το...

- "εξετάσεις '95" Θέματα - επανάληψη

περιέχει 300 περίπου λυμένα και άλυτα θέματα απ' όλη την ύλη ταξινομημένα και μεθοδικά λυμένα.

Η συνεργασία των τριών συγγραφέων

Θ. Καζαντζή - Γ. Μαυρίδη - Ε. Μήτσιου

ήδη γνωστών από το εκπαιδευτικό τους έργο, αποτελεί εγγύηση για την ποιότητα και αυτού του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη 7/5/95

Ο εκδότης
Χάρης Βαφειάδης

Υ.Γ. Από τη θέση αυτή θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την κ. Ξένια Μασούρα για την άρτια και ταχύτατη ηλεκτρονική στοιχειοθεσία και σελιδοποίηση αυτού του βιβλίου καθώς επίσης και τον κ. Δημήτρη Ευαγγελινό για την επιμέλεια των σχημάτων.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Έστω Α, Β, Γ πίνακες τύπου ν×ν για τους οποίους ισχύουν:
α) $ΑΒΓ = Γ$, β) $ΒΓΑ = Α$ και γ) $ΓΑΒ = Β$
Να δείξετε ότι:
i) $Α^2 + Β^2 + Γ^2 = ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ$
ii) $Α + Β + Γ = Α^2Β + Β^2Γ + Γ^2Α$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $ΑΒΓ = Γ$. Άρα $Γ(ΑΒΓ) = ΓΓ \Leftrightarrow (ΓΑΒ)Γ = Γ^2 \overset{γ)}{\Leftrightarrow} ΒΓ = Γ^2$

$ΒΓΑ = Α$. Άρα $Α(ΒΓΑ) = ΑΑ \Leftrightarrow (ΑΒΓ)Α = Α^2 \overset{α)}{\Leftrightarrow} ΓΑ = Α^2$

$ΓΑΒ = Β$. Άρα $Β(ΓΑΒ) = ΒΒ \Leftrightarrow (ΒΓΑ)Β = Β^2 \overset{β)}{\Leftrightarrow} ΑΒ = Β^2$

Οπότε $Α^2 + Β^2 + Γ^2 = ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ$

ii) Είναι $ΒΓ = Γ^2$. Άρα $ΒΓΑ = Γ^2Α \overset{β)}{\Leftrightarrow} Α = Γ^2Α$

$ΓΑ = Α^2$. Άρα $ΓΑΒ = Α^2Β \overset{γ)}{\Leftrightarrow} Β = Α^2Β$

$ΑΒ = Β^2$. Άρα $ΑΒΓ = Β^2Γ \overset{α)}{\Leftrightarrow} Γ = Β^2Γ$

Οπότε $Α + Β + Γ = Α^2Β + Β^2Γ + Γ^2Α$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω Α, Β πίνακες τύπου ν×ν για τους οποίους ισχύει:
$Α^2 = ΑΒ + λΙ$ και $Β^2 = ΒΑ - λΙ$, όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός
Να δείξετε ότι $λ = 0$.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $λ \neq 0$.

Οπότε $Α^2 = ΑΒ + λΙ \Leftrightarrow Α^2 - ΑΒ = λΙ \Leftrightarrow \frac{1}{λ}Α(Α - Β) = Ι \Leftrightarrow (Α - Β)^{-1} = \frac{1}{λ}Α$

και $Β^2 = ΒΑ - λΙ \Leftrightarrow ΒΑ - Β^2 = λΙ \Leftrightarrow \frac{1}{λ}Β(Α - Β) = Ι \Leftrightarrow (Α - Β)^{-1} = \frac{1}{λ}Β$

Άρα $\frac{1}{λ}Α = \frac{1}{λ}Β \Leftrightarrow Α = Β$.

Επομένως η ισότητα $Α^2 = ΑΒ + λΙ$ γίνεται $Α^2 = Α^2 + λΙ \Leftrightarrow λΙ = 0$, αδύνατο αφού $λ \neq 0$. Άρα είναι $λ = 0$.

ΘΕΜΑ 3

Έστω Α ένας πίνακας τύπου ν×ν για τον οποίο ισχύει $A^4 = A + I$

Να δείξετε ότι:

i) Οι πίνακες Α, $A^2 + I$ και $A^2 - I$ είναι αντιστρέψιμοι.

ii) $(A^2 + I)^{-1} + (A^2 - I)^{-1} = 2A$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $A^4 = A + I \Leftrightarrow A^4 - A = I \Leftrightarrow A(A^3 - I) = I$

Δηλαδή ο Α είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = A^3 - I$

Επίσης $A^4 = A + I \Leftrightarrow A^4 - I = A \Leftrightarrow (A^2 - I)(A^2 + I) = A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^{-1}(A^2 - I)(A^2 + I) = A^{-1}A \Leftrightarrow (A^3 - I)(A^2 - I)(A^2 + I) = I$

Άρα ο $A^2 + I$ είναι αντιστρέψιμος με $(A^2 + I)^{-1} = (A^3 - I)(A^2 - I)$.

Επίσης $(A^2 + I)(A^3 - I)(A^2 - I) = I$

Δηλαδή ο $A^2 - I$ είναι αντιστρέψιμος με $(A^2 - I)^{-1} = (A^2 + I)(A^3 - I)$

ii) Έχουμε $(A^2 + I)^{-1} + (A^2 - I)^{-1} = (A^3 - I)(A^2 - I) + (A^2 + I)(A^3 - I) =$

$= A^5 - A^3 - A^2 + I + A^5 - A^2 + A^3 - I = 2A^5 - 2A^2 = 2A^2(A^3 - I) =$

$= 2AAA^{-1} = 2AI = 2A$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω Α, Β, Γ πίνακες τύπου ν×ν για τους οποίους ισχύουν

$$A^2 = A\Gamma + I \text{ και } B\Gamma = BA$$

Να δείξετε ότι:

i) $(A - B)(A - \Gamma) = (A - \Gamma)(A - B)$

ii) $AB + B\Gamma + \Gamma A = BA + A\Gamma + \Gamma B$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $(A-B)(A-\Gamma) = A^2 - A\Gamma - BA + B\Gamma = (A\Gamma + I) - A\Gamma - BA + BA = I$

Οπότε και $(A - \Gamma)(A - B) = I$.

Άρα $(A - B)(A - \Gamma) = (A - \Gamma)(A - B)$

ii) Δείξαμε ότι $(A - B)(A - \Gamma) = (A - \Gamma)(A - B)$

δηλαδή $A^2 - A\Gamma - BA + B\Gamma = A^2 - AB - \Gamma A + \Gamma B$ οπότε παίρνουμε

τελικά $AB + B\Gamma + \Gamma A = BA + A\Gamma + \Gamma B$.

ΘΕΜΑ 5

Αν A, B είναι νxν πίνακες για τους οποίους ισχύουν $A^2 = A^3$ και $A + B = I$ να δείξετε ότι:
α) είναι $(AB)^2 = O$ και ότι
β) οι πίνακες $I - AB$ και $I + AB$ είναι αντιστρέψιμοι.

ΛΥΣΗ

> ● Είναι $(AB)^2 = ABAB$
> Συνδυάζοντας τα δεδομένα, προσπαθούμε να διατυπώσουμε συμπεράσματα για τους πίνακες AB, BA, ABA κ.λπ. και κατόπιν για το γινόμενο $ABAB$.

α) Έχουμε $A + B = I$, οπότε, πολλ/ντας με A από αριστερά, βρίσκουμε

$$A^2 + AB = A$$

άρα και

$$AB = A - A^2$$

Πολλ/με τα μέλη της τελευταίας από δεξιά με A και έχουμε

$$ABA = A^2 - A^3$$

δηλαδή $ABA = O$

Θα είναι λοιπόν $(AB)^2 = ABAB = OB = O$.

β) Εφ' όσον $(AB)^2 = O$, θα έχουμε $I = I - (AB)^2$.
Αλλά $(I + AB)(I - AB) = I - (AB)^2$, οπότε $(I + AB)(I - AB) = I$.
Οι πίνακες $I + AB$, $I - AB$ είναι λοιπόν αντιστρέψιμοι και καθένας τους είναι αντίστροφος του άλλου.

ΘΕΜΑ 6

Αν $X = Y + AXB$, όπου A, B, X, Y είναι νxν (τετραγωνικοί) πίνακες, με $A^3 = O$ να βρεθεί ο πίνακας X συναρτήσει των Y, A, B.

ΛΥΣΗ

Πολλ/με τα μέλη της $X = Y + AXB$ από αριστερά με A^2 και βρίσκουμε $A^2X = A^2Y + A^3XB$ δηλαδή $A^2X = A^2Y$ (1).
Πολλ/τας πάλι τα μέλη της αρχικής από αριστερά με A, θα έχουμε $AX = AY + A^2XB$. Όμως $A^2X = A^2Y$ οπότε θα είναι και

$$AX = AY + A^2YB$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία έκφραση του γινομένου AX στην αρχική $X = Y + AXB$, βρίσκουμε $X = Y + (AY + A^2YB)B = Y + AYB + A^2YB^2$.

ΘΕΜΑ 7

Να βρείτε τον 3x3 αντιστρέψιμο πίνακα A αν είναι

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2|A| & -1 \\ -|A| & 0 & 3+|A| \\ 0 & -|A| & 1 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να βρούμε την $|A|$.

Είναι $A=\begin{bmatrix} 3 & 2|A| & -1 \\ -|A| & 0 & 3+|A| \\ 0 & -|A| & 1 \end{bmatrix}$.

Οπότε $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2|A| & -1 \\ -|A| & 0 & 3+|A| \\ 0 & -|A| & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow |A|=3\begin{vmatrix} 0 & 3+|A| \\ -|A| & 1 \end{vmatrix}+|A|\begin{vmatrix} 2|A| & -1 \\ -|A| & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |A| = 3|A|\,(3 + |A|) + |A|\,(2|A| - |A|) \Leftrightarrow 4|A|^2 + 8|A| = 0$. Όμως $|A| \neq 0$ διότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $|A| = -2$.

Άρα $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

ΘΕΜΑ 8

Να βρείτε τους πίνακες A, B για τους οποίους ισχύουν

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & -2|A| & 3 \\ -1 & -1 & |A| \\ 0 & 10 & 7|B| \end{bmatrix} \text{ και } A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -|A| \\ -1 & 2+|A| & -1 \\ 0 & 5+|A| & -2|A| \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Καταρχήν θα υπολογίσουμε τις $|A|$ και $|B|$.

Εχουμε $AB=\begin{bmatrix} 0 & -2|A| & 3 \\ -1 & -1 & |A| \\ 0 & 10 & 7|B| \end{bmatrix}$. Οπότε $|AB|=\begin{vmatrix} 0 & -2|A| & 3 \\ -1 & -1 & |A| \\ 0 & 10 & 7|B| \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |A||B| = 1\begin{vmatrix} -2|A| & 3 \\ 10 & 7|B| \end{vmatrix} \Leftrightarrow |A||B| = -14|A||B| - 30 \Leftrightarrow |A||B| = -2 \quad (1)$$

Επίσης $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -|A| \\ -1 & 2+|A| & -1 \\ 0 & 5+|A| & -2|A| \end{bmatrix}$. Άρα $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -|A| \\ -1 & 2+|A| & -1 \\ 0 & 5+|A| & -2|A| \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |A| = 1\begin{vmatrix} 1 & -|A| \\ 5+|A| & -2|A| \end{vmatrix} \Leftrightarrow |A| = -2|A| + |A|(5+|A|) \Leftrightarrow |A|^2 + 2|A| = 0$$

Οπότε λόγω της (1) βρίσκουμε $|A| = -2$ και $|B| = 1$.

Άρα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & 7 \end{bmatrix}$ δηλαδή $B = A^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

Θα υπολογίσουμε τον A^{-1} με τη βοήθεια του τύπου $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$.

Είναι $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

Επομένως $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

και $B = A^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 9

Αν οι εξισώσεις

$$\alpha_1 \eta\mu t + \beta_1 \sigma\upsilon\nu t = \gamma_1$$
$$\alpha_2 \eta\mu t + \beta_2 \sigma\upsilon\nu t = \gamma_2$$
$$\alpha_3 \eta\mu t + \beta_3 \sigma\upsilon\nu t = \gamma_3$$

έχουν κοινή λύση να δείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \beta_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

ΛΥΣΗ

Έστω t_0 μία κοινή λύση των δεδομένων εξισώσεων

Είναι $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\eta\mu t_0+\beta_1\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_2\eta\mu t_0+\beta_2\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_3\eta\mu t_0+\beta_3\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \end{vmatrix}^2 \overset{\Sigma_2\to\Sigma_2-(\eta\mu t_0)\Sigma_1}{=} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \end{vmatrix}^2 =$

$(\sigma\upsilon\nu t_0 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix})^2 = \sigma\upsilon\nu^2 t_0 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}^2$

Επίσης $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \beta_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1\eta\mu t_0+\beta_1\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \\ \beta_2 & \alpha_2\eta\mu t_0+\beta_2\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \\ \beta_3 & \alpha_3\eta\mu t_0+\beta_3\sigma\upsilon\nu t_0 & 1 \end{vmatrix}^2 \overset{\Sigma_2\to\Sigma_2-(\eta\mu t_0)\Sigma_1}{=} \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1\eta\mu t_0 & 1 \\ \beta_2 & \alpha_2\eta\mu t_0 & 1 \\ \beta_3 & \alpha_3\eta\mu t_0 & 1 \end{vmatrix}^2 =$

$= (-\eta\mu t_0 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix})^2 = \eta\mu^2 t_0 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}^2$

Άρα $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \beta_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = (\sigma\upsilon\nu^2 t_0 + \eta\mu^2 t_0) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}^2$

ΘΕΜΑ 10

Έστω Α, Β, Γ, Δ αντιστρέψιμοι πίνακες τύπου ν×ν.
Αν ισχύουν $ΑΓ = ΓΑ$ και $ΓΔ = ΔΓ$ να δείξετε ότι:
i) $Α^{-1}Γ = ΓΑ^{-1}$ και $ΓΔ^{-1} = Δ^{-1}Γ$, ii) $|ΑΔ - ΓΒ| = |ΑΔ - ΒΓ|$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $ΑΓ = ΓΑ \Leftrightarrow Α^{-1}(ΑΓ) = Α^{-1}(ΓΑ) \Leftrightarrow (Α^{-1}Α)Γ = (Α^{-1}Γ)Α \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ΙΓ = (Α^{-1}Γ)Α \Leftrightarrow ΓΑ^{-1} = (Α^{-1}Γ)ΑΑ^{-1} \Leftrightarrow ΓΑ^{-1} = Α^{-1}ΓΙ$
δηλαδή $ΓΑ^{-1} = Α^{-1}Γ$
Όμοια δείχνουμε ότι $ΓΔ^{-1} = Δ^{-1}Γ$.

ii) Έχουμε $|ΑΔ - ΓΒ| = |ΑΔ - (ΑΔ)(ΑΔ)^{-1}ΓΒ| = |ΑΔ(Ι - (ΑΔ)^{-1}ΓΒ)| =$
$= |ΑΔ|\,|Ι - (ΑΔ)^{-1}(ΓΒ)| = |ΑΔ|\,|Ι - Δ^{-1}Α^{-1}ΓΒ| =$
$= |ΑΔ|\,|Β^{-1}Β - Δ^{-1}ΓΑ^{-1}Β| = |ΑΔ|\,|(Β^{-1} - Δ^{-1}ΓΑ^{-1})Β| =$
$= |ΑΔ|\,|Β^{-1} - Δ^{-1}ΓΑ^{-1}|\,|Β| = |Β|\,|Β^{-1} - Δ^{-1}ΓΑ^{-1}|\,|ΑΔ| =$
$= |ΒΒ^{-1} - ΒΔ^{-1}ΓΑ^{-1}|\,|ΑΔ| = |ΙΑΔ - ΒΔ^{-1}ΓΑ^{-1}ΑΔ| =$
$= |ΑΔ - ΒΔ^{-1}ΓΔ| = |ΑΔ - ΒΔ^{-1}ΔΓ| = |ΑΔ - ΒΓ|$.

ΘΕΜΑ 11

Να βρείτε τους πίνακες Α καθώς επίσης και τους αντίστροφους αυτών έτσι ώστε να ισχύουν

$$|A| = 1 \text{ και } A^2 + A\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - I = O$$

ΛΥΣΗ

Προφανώς ο Α είναι τύπου 2x2.

Εχουμε $A^2 + A\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - I = O \Leftrightarrow A^2 + A\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\left(A + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = I$ δηλαδή $A^{-1} = A + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (1)

Αν $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τότε $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \omega & -y \\ -z & x \end{bmatrix}$ και $A^{-1} = \begin{bmatrix} \omega & -y \\ -z & x \end{bmatrix}$, αφού $|A| = 1$.

Οπότε η (1) γίνεται $\begin{bmatrix} \omega & -y \\ -z & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \omega & -y \\ -z & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & y+2 \\ z+2 & \omega+1 \end{bmatrix}$

δηλαδή $\begin{cases} \omega = x-1 \\ -y = y+2 \\ -z = z+2 \\ x = \omega+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\omega+1 \\ y=-1 \\ z=-1 \\ x=\omega+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\omega+1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$. Άρα $A = \begin{bmatrix} \omega+1 & -1 \\ -1 & \omega \end{bmatrix}, \omega \in R$

Εξετάζουμε τώρα ποιοί από τους πίνακες που βρήκαμε ικανοποιούν την ισότητα

$|A| = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \omega+1 & -1 \\ -1 & \omega \end{vmatrix} = 1 \Leftrightarrow \omega^2 + \omega - 1 = 1 \Leftrightarrow \omega^2 + \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow (\omega = -1 \text{ ή } \omega = 1)$

Για $\omega=-1$, $A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ και $A^2+A\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}-I=$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\ldots=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Για $\omega=1$, $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ και $A^2+A\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}-I=$

$$=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\ldots=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ώστε το πρόβλημα έχει ακριβώς δύο λύσεις

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix} \text{ και } A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \text{ και } A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 12

Έστω Α πίνακας τύπου νxν τέτοιος ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

$$|A+xI| \geq x^3 \text{ και } |A+(x+y)I| \geq |A+xI|+|A+yI|$$

Να δείξετε ότι:

i) Ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος

ii) $|A+xI|=x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) Ο Α είναι τύπου 3x3.

ΛΥΣΗ

i) Αρκεί να δείξουμε ότι $|A|=0$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$|A+xI| \geq x^3$ (1) και $|A+(x+y)I| \geq |A+xI|+|A+yI|$ (2)

Θέτουμε στην (1) όπου x το 0 και παίρνουμε $|A| \geq 0$

Θέτουμε στην (2) όπου y το $-x$ οπότε παίρνουμε

$|A| \geq |A+xI|+|A-xI|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως για $x=0$ η παραπάνω σχέση γίνεται $|A| \geq |A|+|A| \Leftrightarrow |A| \leq 0$

Ώστε $|A| \geq 0$ και $|A| \leq 0$ δηλαδή $|A|=0$.

ii) Στο ερώτημα (i) δείξαμε ότι

$|A+xI|+|A-xI| \leq 0$ δηλαδή $|A-xI| \leq -|A+xI| \leq -x^3$

και θέτοντας όπου x το $-x$ παίρνουμε $|A+xI| \leq x^3$

Όμως $|A + xI| \geq x^3$ οπότε συμπεραίνουμε τελικά

$|A + xI| = x^3, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

iii) Το πολυώνυμο $P(x) = |A + xI|$ είναι ν-βαθμού και σύμφωνα με το ερώτημα (ii) ισχύει $P(x) = x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\nu = 3$. Δηλαδή ο A είναι τύπου 3x3.

ΘΕΜΑ 13

Έστω A πίνακας τύπου νxν τέτοιος ώστε $A^3 = 8I$.
Αν ο ν είναι περιττός να δείξετε ότι $|A - 2I| = 0$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $A^3 = 8I \Leftrightarrow A^3 - 8I = O \Leftrightarrow A^3 - (2I)^3 = O \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A - 2I)(A^2 + 2A + 4I) = O \quad (1)$.

Έστω ότι $|A - 2I| \neq 0$ δηλαδή ότι ο πίνακας $A - 2I$ είναι αντιστρέψιμος.

Τότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι $A^2 + 2A + 4I = O \Leftrightarrow A^2 + 2A + I = -3I \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A + I)^2 = -3I$.

Οπότε $|(A + I)^2| = |-3I| \Leftrightarrow |A + I|\,|A + I| = (-3)^\nu$ και επειδή ο ν είναι περιττός παίρνουμε $|A + I|^2 = -3^\nu$.

Τούτο όμως είναι αδύνατο αφού $|A + I|^2 \geq 0$ και $-3^\nu < 0$).

Άρα είναι $|A - 2I| = 0$.

ΘΕΜΑ 14

Έστω A, B πίνακες τύπου 3x3, τέτοιοι ώστε να είναι

$$A^2 + AB + I = O \text{ και } |A + B| = 2$$

Ζητείται

α) Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι $AB = BA$.

β) Να δείξετε ότι $A + B = 2\text{adj}(A)$ και ότι δεν υπάρχει πίνακας τύπου 3x1, τέτοιος ώστε να είναι $XX^T = \text{adj}(A)$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A^2 + AB + I = O$, οπότε $A(A + B) = -I$ άρα και $A(-A - B) = I$.

Ο πίνακας A έχει λοιπόν αντίστροφο πίνακα ίσο με $A^{-1} = -A - B$.

Συμπεραίνουμε ότι θα είναι και $A^{-1}A = I$, δηλαδή

$(-A-B)A = I$, οπότε $-A^2 - BA = I$ και τελικά $A^2 + BA + I = O$.

Από τις σχέσεις $A^2 + AB + I = O$ και $A^2 + BA + I = O$ προκύπτει ότι θα είναι και $AB = BA$.

β) Είναι $A\text{adj}(A) = |A|\, I$ όπως επίσης $A(A+B) = -I$.

Βρίσκουμε $|A|\,|A+B| = |-I| = (-1)^3|I| = -1$. Όμως $|A+B| = 2$

Άρα είναι και $2|A| = -1$ και $|A| = -\dfrac{1}{2}$.

Συμπεραίνουμε $A\text{adj}(A) = -\dfrac{1}{2} I$ και αφού $A(A+B) = I$, θα είναι

$$A\text{adj}(A) = \frac{1}{2} A(A+B)$$

Πολλ/με τα μέλη της τελευταίας με A^{-1} από αριστερά και βρίσκουμε

$\text{adj}(A) = \dfrac{1}{2}(A+B)$ και τελικά $A + B = 2\text{adj}(A)$.

Έστω ότι υπάρχει πίνακας $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε $XX^T = \text{adj}A$.

Δηλαδή $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} [x\ y\ z] = \text{adj}A$ οπότε $\begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}(A+B)$.

Άρα $\begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{vmatrix} = \left|\dfrac{1}{2}(A+B)\right| \Leftrightarrow xyz \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 |A+B|$

οπότε $xyz \cdot 0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 2$ άρα $0 = \dfrac{1}{4}$, αδύνατο.

Επομένως δεν υπάρχει πίνακας X τύπου 3x1 τέτοιος ώστε $XX^T = \text{adj}A$.

ΘΕΜΑ 15

Έστω A, B πίνακες τύπου νxν για τους οποίους ισχύουν:

$A^2 = A$, $B^2 = B$, $A(B + 2I) + B(A + 2I) = O$ και $|A + B| > 0$

Να δείξετε ότι:

i) $(A + B)^2 = -A-B$, ii) O A+B είναι διαγώνιος, iii) O ν είναι άρτιος

ΛΥΣΗ

i) Είναι $A(B + 2I) + B(A + 2I) = O$ δηλαδή $AB + 2A + BA + 2B = O$ και τελικά $AB + BA = -2A - 2B$.
Οπότε $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 =$
$= A - 2A - 2B + B = -A - B$.

ii) Δείξαμε ότι $(A + B)^2 = -A - B$ δηλαδή $(A + B)^2 + (A + B) = O$ οπότε $(A + B)(A + B + I) = O$ και επειδή ο $A + B$ είναι αντιστρέψιμος συμπεραίνουμε ότι $A + B + I = O$ δηλαδή $A + B = -I$

iii) Έχουμε $A + B = -I$. Οπότε $|A + B| = |-I| = (-1)^\nu$.
Όμως $|A + B| > 0$ δηλαδή $(-1)^\nu > 0$. Άρα ο ν είναι άρτιος.

ΘΕΜΑ 16

Έστω A, B πίνακες τύπου νxν για τους οποίους ισχύει:
$A^{2\mu}B^{\kappa} = A^{4\mu} + I$, όπου κ, μ σταθεροί θετικοί ακέραιοι
Να δείξετε ότι:
i) Ο A είναι αντιστρέψιμος, ii) $|B^{\kappa} + 2I| \geq 0$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $A^{2\mu}B^{\kappa} = A^{4\mu} + I \Leftrightarrow A^{2\mu}B^{\kappa} - A^{4\mu} = I \Leftrightarrow A(A^{2\mu-1}B^{\kappa} - A^{4\mu-1}) = I$
δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^{2\mu-1}B^{\kappa} - A^{4\mu-1}$

ii) Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος ο $A^{2\mu}$ είναι επίσης αντιστρέψιμος δηλαδή $|A^{2\mu}| \neq 0$ και μάλιστα $|A^{2\mu}| = |(A^{\mu})^2| = |A^{\mu}|\,|A^{\mu}| = |A^{\mu}|^2 > 0$.
Είναι $|B^{\kappa} + 2I| \geq 0 \Leftrightarrow |A^{2\mu}|\,|B^{\kappa} + 2I| \geq 0 \Leftrightarrow |A^{2\mu}(B^{\kappa} + 2I)| \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |A^{2\mu}B^{\kappa} + 2A^{2\mu}| \geq 0 \Leftrightarrow |A^{4\mu} + I + 2A^{2\mu}| \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |(A^{2\mu} + I)^2| \geq 0 \Leftrightarrow |A^{2\mu} + I|\,|A^{2\mu} + I| \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |A^{2\mu} + I|^2 \geq 0$, ισχύει.

ΘΕΜΑ 17

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

i) Αν $P(x) = |A - xI|$, $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $P(x) = x^2 - (\alpha+\delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ▶

▶

ii) Να δείξετε ότι ο $A - I$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας $A - |A|\,I$.

iii) Αν $|A - I| = |A - 2I| = 0$ να βρείτε την $|A|$.

iv) Να δείξετε ότι $|A - I|^2 + |A + I|^2 + |A|^2 \neq 0$.

v) Αν $|A - 1995I| = 0$ και $\alpha + \delta = 1996$ να βρείτε την $|A|$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $A - xI = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-x & \beta \\ \gamma & \delta-x \end{bmatrix}$

Οπότε $P(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} \alpha-x & \beta \\ \gamma & \delta-x \end{vmatrix} = (\alpha - x)(\delta - x) - \beta\gamma =$

$= \alpha\delta - \alpha x - \delta x + x^2 - \beta\gamma = x^2 - (\alpha + \delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας $A - I$ δεν είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν δεν είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας $A - |A|\,I$. Γνωρίζουμε ότι ο $A - I$ δεν είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A - I| = 0$, δηλαδή το τριώνυμο $P(x)$ έχει ως ρίζα το $x_1 = 1$. Αν x_2 είναι η δεύτερη ρίζα του $P(x)$ τότε $x_1x_2 = \alpha\delta - \beta\gamma \Leftrightarrow x_2 = |A| \Leftrightarrow P(|A|) = 0 \Leftrightarrow |A - |A|\,I| = 0$,
άρα ο πίνακας $A - |A|\,I$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

iii) Είναι $|A - I| = |A - 2I| = 0$. Δηλαδή $P(1) = P(2) = 0$
Οπότε $1 \cdot 2 = \alpha\delta - \beta\gamma$ (γινόμενο ριζών τριωνύμου) δηλαδή $|A| = 2$.

iv) Το τριώνυμο $P(x)$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Άρα οι $P(1), P(-1), P(0)$ δεν είναι όλοι μηδέν, οπότε $P^2(1) + P^2(-1) + P^2(0) \neq 0$ ισοδύναμα $|A - I|^2 + |A + I|^2 + |A|^2 \neq 0$.

v) Είναι $|A - 1995I| = 0$ που σημαίνει ότι το $P(x)$ έχει ως ρίζα το $x_1 = 1995$. Επομένως αν x_2 είναι η δεύτερη ρίζα του θα ισχύει $x_1 + x_2 = \alpha + \delta$ (άθροισμα ριζών τριωνύμου) δηλαδή $1995 + x_2 = 1996 \Leftrightarrow x_2 = 1$.
Άρα $P(1995) = P(1) = 0$ οπότε $1 \cdot 1995 = \alpha\delta - \beta\gamma \Leftrightarrow |A| = 1995$.

ΘΕΜΑ 18

Έστω $A = [\alpha_{ij}]$ πίνακας τύπου $\nu \times \nu$ για τον οποίο ισχύουν

i) $|A| = 2$ ▶

▶

ii) $A_{ji}=\begin{cases}2\alpha_{ij}, & \alpha\nu\ i\neq j\\ 2\alpha_{ij}+2, & \alpha\nu\ i=j\end{cases}$

Να δείξετε ότι $|A+I|=1/2$.

ΛΥΣΗ

Είναι $A+I=\begin{cases}2\alpha_{ij}, & \alpha\nu\ i\neq j\\ \alpha_{ij}+1, & \alpha\nu\ i=j\end{cases}=\frac{1}{2}[A_{ji}],\ i,j=1,2,\dots\nu$

Δηλαδή $A+I=\frac{1}{2}\,\mathrm{adj}A \Leftrightarrow A+I=\frac{1}{2}|A|\,A^{-1}$. Όμως $|A|=2$ οπότε

παίρνουμε $A+I=A^{-1}$ δηλαδή $A(A+I)=I$.

Άρα $|A(A+I)|=|I| \Leftrightarrow |A|\,|A+I|=1$ οπότε $2|A+I|=1$ και $|A+I|=1/2$.

ΘΕΜΑ 19

Έστω Α πίνακας τύπου 5x5.

Αν οι πίνακες Α–1995Ι, Α–1996Ι, Α–1997Ι, Α–1998Ι και Α–1999Ι δεν είναι αντιστρέψιμοι να δείξετε ότι ο πίνακας Α–2000Ι είναι αντιστρέψιμος.

ΛΥΣΗ

Οι πίνακες Α–1995Ι, Α–1996Ι, Α–1997Ι, Α–1998Ι και Α–1999Ι δεν είναι αντιστρέψιμοι.

Δηλαδή $|A-1995I|=|A-1996I|=|A-1997I|=|A-1988I|=|A-1999I|=0$. Τούτο σημαίνει ότι η εξίσωση $|A-xI|=0$, είναι πολυωνυμική 5ου βαθμού και έχει ακριβώς 5 ρίζες τους αριθμούς 1995, 1996, 1997, 1998, 1999.

Άρα $|A-2000I|\neq 0$ και συνεπώς ο πίνακας $A-2000I$ είναι αντιστρέψιμος.

ΘΕΜΑ 20

Έστω Α, Β νxν αντιστρέψιμοι πίνακες

i) Να δείξετε ότι: $\mathrm{adj}(B^{-1}AB)=B^{-1}(\mathrm{adj}A)B$

▶

▶

ii) Αν $\text{adj}A = [A_{ji}] = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \neq j \\ i, & \text{αν } i = j \end{cases}$

και το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $|xI - \text{adj}(B^{-1}AB)| = 0$ είναι ίσο με 3 να βρείτε τον πίνακα Α.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $\text{adj}(B^{-1}AB) = |B^{-1}AB|\,(B^{-1}AB)^{-1} = |B^{-1}|\,|AB|\,(B^{-1}A^{-1}B) =$
$= |AB|\,|B^{-1}|\,(B^{-1}A^{-1}B) = |ABB^{-1}|\,(B^{-1}A^{-1}B) =$
$= |A|\,(B^{-1}A^{-1}B) = B^{-1}(|A|\,A^{-1})B = B^{-1}(\text{adj}A)B$

ii) Έχουμε $|xI - \text{adj}(B^{-1}AB)| = 0 \Leftrightarrow |xB^{-1}B - B^{-1}(\text{adj}A)B| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |B^{-1}(xI - \text{adj}A)B| = 0 \Leftrightarrow |B^{-1}|\,(xI - \text{adj}A)B| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |B^{-1}|\,|xI - \text{adj}A|\,|B| = 0 \Leftrightarrow |xI - \text{adj}A| = 0$ αφού $|B^{-1}|\,|B| \neq 0$.

$$\text{Δηλαδή} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-\nu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\ldots(x-\nu) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=1 \\ \text{ή} \\ x=2 \\ \text{ή} \\ \cdots \\ x=\nu \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $1 + 2 + \ldots + \nu = 3$ δηλαδή $\nu = 2$.

Άρα ο πίνακας Α είναι τύπου 2x2 με $\text{adj}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Οπότε $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 21

Αν για τον νxν πίνακα Α ισχύει $A^2 = O$ να δείξετε ότι
$\text{adj}(I - A) = |I - A|\,(I + A)$

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχήν εξετάζουμε αν ο $I - A$ είναι αντιστρέψιμος.

Έχουμε $A^2 = O \Leftrightarrow -A^2 = O \Leftrightarrow I - A^2 = I \Leftrightarrow (I - A)(I + A) = I \Leftrightarrow (I - A)^{-1} = I + A$

Επίσης $(I - A)^{-1} = \dfrac{1}{|I - A|}\,\text{adj}(I - A)$.

Άρα $\dfrac{1}{|I - A|}\,\text{adj}(I - A) = I + A$ οπότε $\text{adj}(I - A) = |I - A|\,(I + A)$.

ΘΕΜΑ 22

i) Αν ο πίνακας Α δεν είναι διαγώνιος και ισχύει

$$\varkappa_1 A + \varkappa_2 I = \lambda_1 A + \lambda_2 I$$

να δείξετε ότι $\varkappa_1 = \lambda_1$ και $\varkappa_2 = \lambda_2$.

ii) Αν ο πίνακας A^{-1} δεν είναι διαγώνιος και ισχύει

$$\text{adj}A = (\varkappa + 1)A^{-1} = (\varkappa + |A|)I$$

να βρείτε την τιμή του $\varkappa \in \mathbb{R}$ και την $|A|$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\varkappa_1 A + \varkappa_2 I = \lambda_1 A + \lambda_2 I$ οπότε $\varkappa_1 A - \lambda_1 A = \lambda_2 I - \varkappa_2 I$ και $(\varkappa_1 - \lambda_1)A = (\lambda_2 - \varkappa_2)I$ (1)

Αν ήταν $\varkappa_1 \neq \lambda_1$ τότε από την (1) θα παίρναμε $A = \frac{\lambda_2 - \varkappa_2}{\varkappa_1 - \lambda_1} I$, άτοπο διότι ο Α δεν είναι διαγώνιος. Άρα $\varkappa_1 = \lambda_1$ οπότε από την (1) προκύπτει ότι $O = (\lambda_2 - \varkappa_2)I$ δηλαδή $\lambda_2 - \varkappa_2 = 0$ και $\varkappa_2 = \lambda_2$.

ii) Είναι $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A \Leftrightarrow \text{adj}A = |A|\, A^{-1}$ και $\text{adj}A = |A|A^{-1} + 0 \cdot I$

Επίσης $\text{adj}A = (\varkappa + 1)A^{-1} + (\varkappa + |A|)I$

Άρα $|A|A^{-1} + 0 \cdot I = (\varkappa + 1)A^{-1} + (\varkappa + |A|)I$.

Επειδή ο A^{-1} δεν είναι διαγώνιος από την παραπάνω ισότητα σύμφωνα με το ερώτημα (i) παίρνουμε $|A| = \varkappa + 1$ και $0 = \varkappa + |A|$

Οπότε βρίσκουμε τελικά $\varkappa = -\frac{1}{2}$ και $|A| = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 23

i) Να δείξετε ότι αν ο Α είναι αντιστρέψιμος πίνακας τύπου νxν τότε

$$|\text{adj}A| = |A|^{\nu-1}$$

ii) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta & 0 \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Αν $A = \text{adj}B$ και $|B| > 0$ να δείξετε ότι $AA^T = I$ και στη συνέχεια να βρείτε τον πίνακα Β.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$ δηλαδή $adjA = |A|\, A^{-1}$

Οπότε $|adjA| = ||A|A^{-1}| = |A|^{\nu}|A^{-1}| = |A|^{\nu-1}|A|\,|A^{-1}| = |A|^{\nu-1}|AA^{-1}| =$
$= |A|^{\nu-1}|I| = |A|^{\nu-1}$.

ii) Έχουμε $AA^T = \begin{bmatrix} συνθ & -ημθ & 0 \\ ημθ & συνθ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} συνθ & ημθ & 0 \\ -ημθ & συνθ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} συν^2θ+ημ^2θ & 0 & 0 \\ 0 & ημ^2θ+συν^2θ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Επειδή γνωρίζουμε τον adjB θα βρούμε πρώτα τον πίνακα $B^{-1} = \frac{1}{|B|} adjB$

Είναι $A = adjB$. Άρα $|A| = |adjB|$ και από το ερώτημα (i) παίρνουμε

$\begin{vmatrix} συνθ & -ημθ & 0 \\ ημθ & συνθ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |B|^{3-1}$ δηλ. $1 = |B|^2$ και επειδή $|B| > 0$ βρίσκουμε $|B| = 1$.

Επομένως $B^{-1} = \frac{1}{1} adjB \Leftrightarrow B^{-1} = A$ και $B = A^{-1}$

Όμως $AA^T = I$ οπότε $B = A^T$ δηλ. $B = \begin{bmatrix} συνθ & ημθ & 0 \\ -ημθ & συνθ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ΘΕΜΑ 24

Έστω A ένας πίνακας τύπου ν×ν, για τον οποίο ισχύουν:

$$A^3 - 4A + I = O,\ adj(2I + A) = 2I - A \text{ και } |A| = -1$$

Να δείξετε ότι:

i) Οι πίνακες $2I - A$ και $2I + A$ είναι αντιστρέψιμοι και να βρείτε τους αντίστροφους αυτών.

ii) Ο πίνακας A είναι διαγώνιος.

iii) Ο ν είναι περιττός.

iv) $|2I + A| + |2I - A| = 0$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $A^3 - 4A + I = O \Leftrightarrow -A^3 + 4A = I \Leftrightarrow A(-A^2 + 4I) = I \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A(2I - A)\,(2I + A) = I$

Δηλαδή $(2I + A)^{-1} = A(2I - A)$.

Επίσης $(2I + A)A(2I - A) = I \Leftrightarrow (2I - A)^{-1} = (2I + A)A$.

ii) Έχουμε $(2I + A)^{-1} = \dfrac{1}{|2I + A|} \operatorname{adj}(2I + A) \Leftrightarrow A(2I - A) = \dfrac{1}{|2I + A|}(2I - A)$

και επειδή ο πίνακας $2I - A$ είναι αντιστρέψιμος παίρνουμε $A = \dfrac{1}{|2I + A|} I$.

Άρα ο πίνακας A είναι διαγώνιος.

iii) Δείξαμε ότι $A = \dfrac{1}{|2I + A|} I$. Οπότε $|A| = \dfrac{1}{|2I + A|^{\nu}} |I|$. Όμως $|A| = -1$.

Συνεπώς βρίσκουμε $|2I + A|^{\nu} = -1$.

Δηλαδή ο ν είναι περιττός και $|2I + A| = -1$.

iv) Στο ερώτημα i) δείξαμε ότι $A(2I - A)(2I + A) = I$.

Επομένως $|A(2I - A)(2I + A)| = |I| \Leftrightarrow |A|\,|2I - A|\,|2I + A| = 1$

οπότε $(-1)(-1)|2I + A| = 1$ και $|2I + A| = 1$.

Ώστε $|2I + A| + |2I - A| = 1 - 1 = 0$.

ΘΕΜΑ 25

Έστω ένα 3x3 γραμμικό σύστημα (Σ) με αγνώστους x, y, ω. Αν το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση και ισχύει

$$xDx + yDy + \omega D\omega$$

να δείξετε ότι είναι ομογενές.

ΛΥΣΗ

Το (Σ) έχει μοναδική λύση. Δηλαδή $D \neq 0$.

Έχουμε: $xDx + yDy + \omega D\omega = 0$. Διαιρώντας με D παίρνουμε

$$x\frac{Dx}{D} + y\frac{Dy}{D} + \omega\frac{D\omega}{D} = \frac{0}{D} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xx + yy + \omega\omega = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \omega^2 = 0$$

Δηλαδή $(x, y, \omega) = (0, 0, 0)$.

Επομένως αν αντικαταστήσουμε στο (Σ), $x = 0$, $y = 0$, $\omega = 0$ προκύπτει ότι οι σταθεροί του όροι είναι ίσοι με το μηδέν.

Ώστε το (Σ) είναι ομογενές.

ΘΕΜΑ 26

Αν (x_1, y_1, ω_1), (x_2, y_2, ω_2) είναι δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} x + (\lambda-3)y - \omega = 1 \\ \quad (\lambda-2)y - \omega = \lambda - 4 \\ \lambda x - \quad 3y \quad = 3(\lambda-1), \ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Να δείξετε ότι:

i) $x_1y_1 = \omega_1^2 - 1$ **και** $x_2y_2 = \omega_2^2 - 1$.

ii) $x_1x_2 + y_1y_2 - 2\omega_1\omega_2 = 2$.

ΛΥΣΗ

Επειδή το (Σ) έχει δύο διαφορετικές λύσεις συμπεραίνουμε ότι θα έχει άπειρες.

Άρα $D = 0$ δηλαδή $\begin{vmatrix} 1 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ \lambda & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \lambda\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} =$

$\Leftrightarrow -3 + \lambda(-\lambda + 3 + \lambda - 2) = 0$ οπότε βρίσκουμε τελικά $\lambda = 3$.

Για $\lambda = 3$ το (Σ) γίνεται

$$\begin{cases} x - \omega \quad = 1 \\ y - \omega \quad = -1 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \omega = 1 \\ y - \omega = -1 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ δηλαδή } \begin{cases} x = \omega + 1 \\ y = \omega - 1 \\ 2 = 2 \end{cases}$$

Ώστε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y, \omega) = (\omega + 1, \omega - 1, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$

Επομένως $(x_1, y_1, \omega_1) = (\omega_1 + 1, \omega_1 - 1, \omega_1)$ και

$(x_2, y_2, \omega_2) = (\omega_2 + 1, \omega_2 - 1, \omega_2)$

i) Είναι $x_1y_1 = (\omega_1 + 1)(\omega_1 - 1) = \omega_1^2 - 1$ και $x_2y_2 = (\omega_2 + 1)(\omega_2 - 1) = \omega_2^2 - 1$

ii) Ακόμη $x_1x_2 + y_1y_2 - 2\omega_1\omega_2 = (\omega_1 + 1)(\omega_2 + 1) + (\omega_1 - 1)(\omega_2 - 1) - 2\omega_1\omega_2 =$

$= \omega_1\omega_2 + \omega_1 + \omega_2 + 1 + \omega_1\omega_2 - \omega_1 - \omega_2 + 1 - 2\omega_1\omega_2 = 2$.

ΘΕΜΑ 27

i) Αν Α είναι πίνακας τύπου νxν να δείξετε ότι $|A^2| = |AA^T| = |A|^2$

ii) Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha \\ \beta x - \alpha y + \gamma \omega = \beta \\ \gamma x - \alpha z - \beta \omega = \gamma \\ \gamma y - \beta z + \alpha \omega = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ **και** $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $|A^2| = |AA| = |A|\,|A| = |A|^2$ και $|AA^T| = |A|\,|A^T| = |A|\,|A| = |A|^2$.

Άρα $|A^2| = |AA^T| = |A|^2$.

ii) Ο πίνακας του (Σ) είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \gamma & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \text{ και } A^2 = AA = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \gamma & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \gamma & -\beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Οπότε $|A^2| = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^4$ δηλαδή $|A|^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^4$ οπότε $D = \pm(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 \neq 0$, διότι $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ και συνεπώς οι α, β, γ δεν είναι όλοι μηδέν.

Επίσης $Dx = D$, διότι η στήλη των συντελεστών του x είναι ίση με τη στήλη των σταθερών όρων.

$Dy = 0$, διότι η 1η και 2η στήλη είναι ίσες

$Dz = 0$, " 1η και 3η " " "

$D\omega = 0$, " 1η και 4η " " "

Ώστε σε κάθε περίπτωση το (Σ) έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{Dx}{D} = 1,\ y = \frac{Dy}{D} = 0,\ z = \frac{Dz}{D} = 0,\ \omega = \frac{D\omega}{D} = 0.$$

ΘΕΜΑ 28

Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha x - \alpha y + (\beta + 1)(x - z) = 0$$

$$\beta x - \beta y - (\alpha - 1)(x - z) = 0$$

και οι x, y, z δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους να δείξετε ότι το σημείο $M(\alpha, \beta)$ κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x - \alpha y + (\beta+1)(x-z) = 0 \\ \beta x - \beta y - (\alpha-1)(x-z) = 0 \end{cases} \quad \text{δηλ.} \quad \begin{cases} \alpha(x-y) + (\beta+1)(x-z) = 0 \\ \beta(x-y) - (\alpha-1)(x-z) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Πρόκειται για 2x2 ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο έχει και μη μηδενικές λύσεις $(x-y, x-z)$ διότι σύμφωνα με τα δεδομένα οι x, y, z δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους.

Δηλαδή $D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta+1 \\ \beta & -(\alpha-1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + \alpha - \beta^2 - \beta = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \left(\alpha^2 - 2\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\right) + \left(\beta^2 + 2\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Άρα το σημείο $M(\alpha, \beta)$ κινείται στον κύκλο $c: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Το κέντρο του c είναι το σημείο $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και η ακτίνα του $\varrho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΘΕΜΑ 29

Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \alpha \\ \gamma x + \delta y = \delta, \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\Sigma) \text{ και } \begin{cases} \varkappa x + \lambda y = \varkappa \\ \mu x + \nu y = \nu, \quad \varkappa,\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Αν ισχύουν $\alpha\varkappa + \beta\mu = \alpha\lambda + \beta\nu$ και $\gamma\varkappa + \delta\mu = \gamma\lambda + \delta\nu$ να δείξετε ότι ένα τουλάχιστον από τα (Σ), (Σ') έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο.

ΛΥΣΗ

Οι πίνακες των συντελεστών των αγνώστων των (Σ) και (Σ') είναι αντίστοιχα

$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix}$.

Για να δείξουμε ότι ένα τουλάχιστον από τα (Σ), (Σ') έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο αρκεί να δείξουμε ότι $|A| = 0$ ή $|B| = 0$.

Δηλαδή ότι $|A|\,|B| = 0$ ισοδύναμα $|AB| = 0$.

Εχουμε $AB = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\varkappa+\beta\mu & \alpha\lambda+\beta\nu \\ \gamma\varkappa+\delta\mu & \gamma\lambda+\delta\nu \end{bmatrix}$

Παρατηρούμε ότι οι στήλες του AB είναι ίσες μεταξύ τους.

Οπότε $|AB| = 0$, που είναι η ζητούμενη σχέση.

ΘΕΜΑ 30

Να δείξετε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} 3^{1995}x - 8^{1453}y + 1994z &= 0 \\ 11^{1990}x + 5^{1821}y - 2001z &= 0 \\ 13^{1996}x - 2002y + 7^{1993}z &= 0 \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση την $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

ΛΥΣΗ

Η ορίζουσα του συστήματος, αναπτύσσοντάς την ως προς την 1η γραμμή είναι: $D = 3^{1995}(5^{1821}7^{1993} - 2001\cdot2002) + 8^{1453}(11^{1940}\cdot7^{1993} + 2001\cdot13^{1996}) - 1994(2002\cdot11^{1940} + 5^{1821}\cdot13^{1995}) =$ περιττός + άρτιος + άρτιος = περιττός $\neq 0$. Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές έχει μοναδική λύση την $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

ΘΕΜΑ 31

Στις εξίσωσεις : $(\alpha-\gamma)z - (\beta-\alpha)y = 3\alpha$, $(\beta-\alpha)x - (\gamma-\beta)z = 3\beta$, $(\gamma-\beta)y - (\alpha-\gamma)x = 3\gamma$ οι αριθμοί α, β, γ δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους. Να αποδειχθεί ότι για $x, y, z \in \mathbb{Z}_+^*$ καμμία άλλη λύση δεν μπορεί να υπάρχει εκτός από την $x = y = z = 1$ και αυτή υπάρχει μόνο αν $\alpha+\beta+\gamma=0$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\begin{cases}(\alpha-\gamma)z-(\beta-\alpha)y=3\alpha\\(\beta-\alpha)x-(\gamma-\beta)z=3\beta\\(\gamma-\beta)y-(\alpha-\gamma)x=3\gamma\end{cases}$ δηλ. $\begin{cases}(y+z-3)\alpha-y\beta-z\gamma=0\\-x\alpha+(x+z-3)\beta-z\gamma=0\\-x\alpha-y\beta+(x+y-3)\gamma=0\end{cases}$

με x, y, z θετικούς ακεραίους. Πρόκειται για 3x3 ομογενές γρ. σύστημα το οποίο έχει και μη μηδενικές λύσεις (α, β, γ), αφού σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί α, β, γ δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους. Δηλαδή

$$D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y+z-3 & -y & -z \\ -x & x+z-3 & -z \\ -x & -y & x+y-3 \end{vmatrix} = 0 \overset{\Sigma_1\to\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} -3 & -y & -z \\ -3 & x+z-3 & -z \\ -3 & -y & x+y-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underset{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1}{\overset{\Gamma_1\to\Gamma_2-\Gamma_1}{\Leftrightarrow}} \begin{vmatrix} -3 & -y & -z \\ 0 & x+y+z-3 & -z \\ 0 & 0 & x+y+z-3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow -3(x+y+z-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x+y+z=3$ και επειδή $x,y,z \geq 1$ θα είναι τελικά $x=y=z=1$. Θέτουμε τώρα στο αρχικό σύστημα $x=1$, $y=1$ και $z=1$ οπότε

παίρνουμε $\begin{cases}-\alpha-\beta-\gamma=0\\-\alpha-\beta-\gamma=0\\-\alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}$. Δηλαδή $\alpha+\beta+\gamma=0$.

ΘΕΜΑ 32

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma \omega = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' \omega = 0 \end{cases} \text{ με } \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$$

Να δείξετε ότι για κάθε λύση του (x_0, y_0, ω_0) ισχύει

$$\frac{x_0}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}} = \frac{y_0}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}} = \frac{\omega_0}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

ΛΥΣΗ

Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = -\gamma \omega_0 \\ \alpha' x + \beta' y = -\gamma' \omega_0 \end{cases}$

Πρόκειται για 2x2 γραμμικό σύστημα με $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$.

Δηλαδή έχει μοναδική λύση

$$x = x_0 = \frac{Dx}{D} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -\gamma\omega_0 & \beta \\ -\gamma'\omega_0 & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\omega_0 \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \text{ οπότε } \frac{x_0}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\omega_0}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

$$\text{και } y = y_0 = \frac{Dy}{D} \Leftrightarrow y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma\omega_0 \\ \alpha' & -\gamma'\omega_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\omega_0 \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \text{ οπότε } \frac{y_0}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}} = \frac{\omega_0}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\dfrac{x_0}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \beta' \end{vmatrix}} = \dfrac{y_0}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}} = \dfrac{\omega_0}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$

ΘΕΜΑ 33

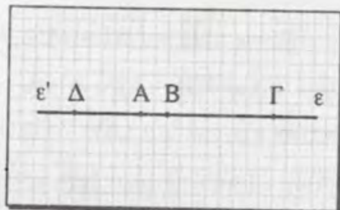
Έστω Α, Β, Γ, Δ σημεία του επιπέδου, τέτοια ώστε να είναι

$\vec{AB} \neq \vec{0}$ και $\vec{B\Gamma} = \varkappa \vec{AB}$, $\vec{A\Delta} = \lambda \vec{BA}$, $\vec{\Gamma\Delta} = (4 - \mu)\vec{BA}$ όπου $\varkappa, \lambda, \mu \in N^*$ (1)

Να δείξετε ότι θα είναι $\varkappa = \lambda = \mu = 1$.

ΛΥΣΗ

Από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι τα σημεία Γ και Δ είναι σημεία της ευθείας ΑΒ και συγκεκριμένα ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA}$, άρα το Γ είναι σημείο της ημιευθείας Βε, ενώ το Δ σημείο της ημιευθείας Αε΄. Είναι επίσης



Είναι επίσης $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} = \kappa\,\overrightarrow{BA}$

δηλαδή $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (\kappa + \lambda + 1)\,\overrightarrow{BA}$. Όμως $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (4 - \mu)\overrightarrow{BA}$ οπότε οπότε $(\kappa + \lambda + 1)\overrightarrow{BA} = (4 - \mu)\overrightarrow{BA}$ και $(\kappa + \lambda + \mu - 3)\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Είναι όμως $\overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$, οπότε έχουμε $\kappa + \lambda + \mu = 3$ και αφού $\kappa, \lambda, \mu \geq 1$, θα είναι τελικά $\kappa = \lambda = \mu = 1$.

ΘΕΜΑ 34

Αν G είναι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right| = 3$$

να δείξετε ότι $\left|\overrightarrow{GB}\right| + \sqrt{2}\left|\overrightarrow{G\Gamma}\right| > 1$.

ΛΥΣΗ

Εχουμε $\left|\overrightarrow{GB}\right| + \sqrt{2}\left|\overrightarrow{G\Gamma}\right| > \left|\overrightarrow{GB}\right| + \left|\overrightarrow{G\Gamma}\right| \geq \left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma}\right| = \left|-\overrightarrow{GA}\right| = \left|\overrightarrow{AG}\right| = \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right|$,

(όπου ΑΜ διάμεσος) και επειδή $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right)$ βρίσκουμε τελικά

$$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right| = \left|\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right| = \frac{1}{3}\,3 = 1.$$

ΘΕΜΑ 35

Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο, το οποίο ισχύει

$$2\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right| - \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|\right| \quad (1)$$

όπου Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ.
Να δείξετε ότι το τετράπλευρο είναι τραπέζιο, με ΑΒ // ΓΔ.

ΛΥΣΗ

Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$

και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Gamma M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{N\Delta}$

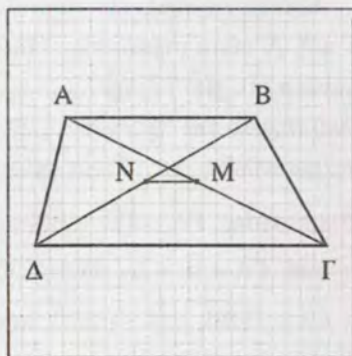
οπότε έχουμε και $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\,\overrightarrow{MN}$ αφού

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{\Gamma M} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{N\Delta} = \vec{0}$

Βρίσκουμε $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, οπότε η (1)

γίνεται $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}\right| = \left||\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{\Delta\Gamma}|\right|$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, από τη γνωστή τριγωνική συνθήκη ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι συγγ/κά και ομόρροπα. Είναι λοιπόν ΑΒ//ΓΔ και το ζητούμενο δείχθηκε.



ΘΕΜΑ 36

Δίνονται τα μη μηδενικά $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Αν υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν

$$\varkappa_1\vec{\alpha} + \varkappa_2\vec{\beta} + \varkappa_3\vec{\gamma} = \vec{0} \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{|\vec{\alpha}|}{\lambda_1} = \frac{|\vec{\beta}|}{\lambda_2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{\lambda_3} \quad (2)$$

να δείξετε ότι:

i) Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

ii) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε και μόνο όταν $\varkappa_1\lambda_1 + \varkappa_2\lambda_2 = \varkappa_3\lambda_3$.

ΛΥΣΗ

i) Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\beta} \uparrow\uparrow (\varkappa_1\vec{\alpha} + \varkappa_2\vec{\beta})$, διότι $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbb{R}_+^*$

ή λόγω της (1) $\vec{\beta} \uparrow\uparrow (-\varkappa_3\vec{\gamma})$. Δηλαδή $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$, διότι $-\varkappa_3 < 0$

ii) Επειδή $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$ έχουμε: $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \varkappa_1\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \varkappa_2\vec{\beta} \Leftrightarrow |\varkappa_1\vec{\alpha} + \varkappa_2\vec{\beta}| = |\varkappa_1\vec{\alpha}| + |\varkappa_2\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} |-\varkappa_3\vec{\gamma}| = \varkappa_1|\vec{\alpha}| + \varkappa_2|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \varkappa_3|\vec{\gamma}| = \varkappa_1|\vec{\alpha}| + \varkappa_2|\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varkappa_3|\vec{\gamma}| = \varkappa_1\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}|\vec{\gamma}| + \varkappa_2\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}|\vec{\gamma}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varkappa_3\lambda_3|\vec{\gamma}| = (\varkappa_1\lambda_1 + \varkappa_2\lambda_2)|\vec{\gamma}|$. Είναι όμως $|\vec{\gamma}| \neq 0$

οπότε ισοδύναμα έχουμε $\varkappa_1\lambda_1 + \varkappa_2\lambda_2 = \varkappa_3\lambda_3$.

ΘΕΜΑ 37

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια ώστε να είναι

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \text{ και } |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|\neq 0$$

καθώς επίσης και

$$(\lambda+1)|\vec{\alpha}|=\lambda|\vec{\beta}| \text{ και } 2\lambda|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}| \text{ και } (\lambda+2)|\vec{\beta}|=2|\vec{\gamma}|$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $2\lambda \neq -1$.

Να δείξετε ότι είναι $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}=-3\vec{\alpha}$.

ΛΥΣΗ

Είναι $|\vec{\beta}|=2\lambda|\vec{\alpha}|$ και $2|\vec{\gamma}|=2\lambda(\lambda+2)|\vec{\alpha}|$ καθώς επίσης $(\lambda+1)|\vec{\alpha}|=2\lambda^2|\vec{\alpha}|$, δηλαδή $(2\lambda^2-\lambda-1)|\vec{\alpha}|=6$. Παρατηρούμε ότι για $\vec{\alpha}=\vec{0}$, θα είναι και $\vec{\beta}=\vec{\gamma}=0$. Άρα λοιπόν είναι $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$.

Συμπεραίνουμε ότι θα είναι $2\lambda^2-\lambda-1=0$ οπότε $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ είτε $\lambda=1$.

Είναι τελικά $\lambda=1$, αφού $2\lambda\neq-1$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και $2|\vec{\gamma}|=6|\vec{\alpha}|$, δηλαδή $|\vec{\gamma}|=3|\vec{\alpha}|$.

Είναι λοιπόν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}|=3|\vec{\alpha}|$ οπότε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ λοιπόν είναι λοιπόν συγγ/κά και ομόρροπα, οπότε θα έχουμε:

$\vec{\beta}=\varrho\vec{\alpha}$ με $\varrho>0$. Τότε όμως $|\vec{\beta}|=|\varrho\vec{\alpha}|=\varrho|\vec{\alpha}|$, άρα λοιπόν $\varrho=2$ και είναι $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$. Βρίσκουμε τότε και $\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}=-3\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 38

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0},\ |\vec{\beta}|=\varkappa|\vec{\beta}|-\varkappa|\vec{\alpha}|,\ (\varkappa-2)|\vec{\alpha}|+(\varkappa+1)|\vec{\beta}|=2|\vec{\gamma}|$$

και $(3\varkappa-4)|\vec{\alpha}|+\varkappa|\vec{\beta}|-2|\vec{\gamma}|=0,\ \varkappa\in\mathbb{Z}$.

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ δεν είναι όλα μηδενικά να δείξετε ότι

i) $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, ii) $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases}|\vec{\beta}| = \varkappa|\vec{\beta}| - \varkappa|\vec{\alpha}| \\ (\varkappa-2)|\vec{\alpha}| + (\varkappa+1)|\vec{\beta}| = 2|\vec{\gamma}| \\ (3\varkappa-4)|\vec{\alpha}| + \varkappa|\vec{\beta}| - 2|\vec{\gamma}| = 0\end{cases} \text{ δηλαδή } \begin{cases}\varkappa|\vec{\alpha}| + (1-\varkappa)|\vec{\beta}| = 0 \\ (\varkappa-2)|\vec{\alpha}| + (\varkappa+1)|\vec{\beta}| - 2|\vec{\gamma}| = 0 \\ (3\varkappa-4)|\vec{\alpha}| + \varkappa|\vec{\beta}| - 2|\vec{\gamma}| = 0\end{cases}$$

Πρόκειται για 3x3 ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο έχει και μη μηδενικές λύσεις $\left(|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|, |\vec{\gamma}|\right)$ διότι σύμφωνα με τα δεδομένα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ δεν είναι όλα μηδενικά.

Οπότε $D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varkappa & 1-\varkappa & 0 \\ \varkappa-2 & \varkappa+1 & -2 \\ 3\varkappa-4 & \varkappa & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varkappa & 1-\varkappa & 0 \\ -2\varkappa+2 & 1 & 0 \\ 3\varkappa-4 & \varkappa & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2\begin{vmatrix} \varkappa & 1-\varkappa \\ -2\varkappa+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \varkappa + (\varkappa-1)(-2\varkappa+2) = 0 \Leftrightarrow \varkappa - 2\varkappa^2 + 2\varkappa + 2\varkappa - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\varkappa^2 - 5\varkappa + 2 = 0$

Είναι τελικά $\varkappa = 2$ αφού $\varkappa \in Z$.

Οπότε αντικαθιστώντας στο αρχικό σύστημα παίρνουμε

$$\begin{cases}2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 0 \\ 3|\vec{\alpha}| - 2|\vec{\gamma}| = 0 \\ 2|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}| - 2|\vec{\gamma}| = 0\end{cases} \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = \frac{2}{3}|\vec{\gamma}|$$

i) Έχουμε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$. Άρα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}|$ και $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = \frac{1}{3}|\vec{\gamma}| + \frac{2}{3}|\vec{\gamma}| = |\vec{\gamma}|$

Επομένως $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

ii) Είναι $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = -\vec{\alpha}$. Άρα $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = |-\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha}| = \frac{1}{3}|\vec{\gamma}|$ και $\left||\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}|\right| = \left|\frac{2}{3}|\vec{\gamma}| - |\vec{\gamma}|\right| = \frac{1}{3}|\vec{\gamma}|$

Επομένως $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = \left||\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}|\right| \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$.

ΘΕΜΑ 39

Δίνεται το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, στο οποίο Ε είναι το μέσο του ΑΒ, και Ζ το σημείο του τμήματος ΓΔ, για το οποίο είναι $\overrightarrow{ΓΖ} = 2\overrightarrow{ΖΔ}$. Αν είναι Μ το κοινό σημείο των ΑΓ, ΕΖ και είναι

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AΓ} \text{ και } \overrightarrow{EM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EZ}$$

να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{EZ} = \vec{\beta}$. Έχουμε τότε $\overrightarrow{AM} = \frac{3\vec{\alpha}}{7}$, $\overrightarrow{EM} = \frac{3\vec{\beta}}{7}$ οπότε

$\overrightarrow{M\Gamma} = \frac{4\vec{\alpha}}{7}$ και $\overrightarrow{MZ} = \frac{4\vec{\beta}}{7}$

Προκύπτει ότι θα είναι επίσης και

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} = \frac{3\vec{\alpha}}{7} - \frac{3\vec{\beta}}{7}$ και

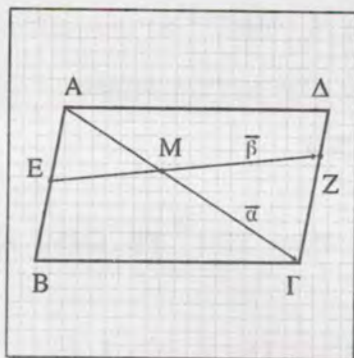
$\overrightarrow{Z\Gamma} = \overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{MZ} = \frac{4\vec{\alpha}}{7} - \frac{4\vec{\beta}}{7}$

Συμπεραίνουε λοιπόν, ότι θα είναι

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} = \frac{6}{7}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$ καθώς και

$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}\overrightarrow{Z\Gamma} = \frac{6}{7}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$ και τελικά ότι

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι λοιπόν παραλληλόγραμμο.



- Για να δείξουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε ότι είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, είτε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$. Στην περίπτωσή μας θα δείξουμε ότι είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$
- **Αναγωγή στον ελάχιστο αριθμό διανυσμάτων**

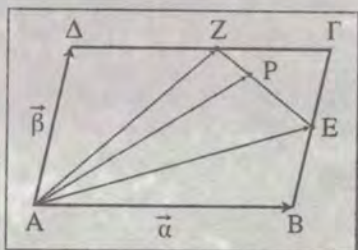
Για την επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας του επιπέδου, θεωρούμε δύο (βασικά) διανύσματα α, β (μη συγγραμικά) και εκφράζουμε συναρτήσει τούτων, όλα τα στοιχεία του προβλήματος (διανύσματα που δεν διαφέρουν, δεδομένα, ζητούμενα συνθήκες). Αναγόμαστε συνήθως σε πρόβλημα που εύκολα μπορούμε να λύσουμε.

ΘΕΜΑ 40

Στο διπλανό παραλληλόγραμμο το σημείο Ρ χωρίζει το $\overrightarrow{ZE}$ σε λόγο $\frac{1}{2}$.

i) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AP}$ ως γρ. συνδυασμό των $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AZ}$

▶



▶

ii) Αν $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Delta Z} = \lambda\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ έτσι ώστε τα σημεία Α, Ρ, Γ να είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $\overrightarrow{ZP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PE}$. Οπότε $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AZ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}{1 + \frac{1}{2}}$ δηλ. $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AZ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$

και $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AZ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

ii) Εχουμε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Οπότε: $\overrightarrow{AE} = \vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$, και

$\overrightarrow{AZ} = \vec{\beta} + \lambda\vec{\alpha}$. Συνεπώς $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AZ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}(\vec{\beta} + \lambda\vec{\alpha}) + \frac{1}{3}(\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}) =$

$= \frac{2\lambda + 1}{3}\vec{\alpha} + \frac{7}{9}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Τα σημεία Α, Ρ, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{A\Gamma}$. Δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{AP} = \kappa\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{2\lambda + 1}{3}\vec{\alpha} + \frac{7}{9}\vec{\beta} = \kappa\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ (1)

Όμως τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά οπότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\kappa = \frac{2\lambda + 1}{3}$ και $\kappa = \frac{7}{9}$. Δηλαδή $\kappa = \frac{7}{9}$ και $\lambda = \frac{2}{3}$.

ΘΕΜΑ 41

Έστω Κ σημείο του επιπέδου τριγώνου ΑΒΓ, τέτοιο ώστε να είναι

$$\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AB} + \varrho\overrightarrow{A\Gamma} \text{ και } \overrightarrow{\Gamma K} = \lambda\overrightarrow{\Gamma A} + \varrho\overrightarrow{\Gamma B}$$

Να δείξετε ότι το Κ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και έχουμε

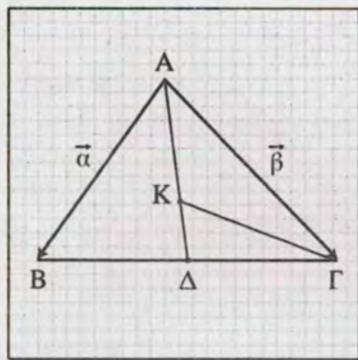
$\overrightarrow{AK} = \lambda\vec{\alpha} + \varrho\vec{\beta}$ και

$\overrightarrow{\Gamma K} = -\lambda\vec{\beta} + \varrho\left(-\vec{\beta} + \vec{\alpha}\right) = -(\lambda + \varrho)\vec{\beta} + \varrho\vec{\alpha}$.

Είναι όμως $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε

$\lambda\vec{\alpha} + \varrho\vec{\beta} + (\lambda + \varrho)\vec{\beta} - \varrho\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ οπότε

$(\lambda - \varrho)\vec{\alpha} = (1 - \lambda - 2\varrho)\vec{\beta}$ και αφού τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, θα έχουμε $\lambda=\varrho$ και $\lambda+2\varrho=1$



Προκύπτει τότε, ότι $\lambda = \varrho = \frac{1}{3}$ και είναι $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \frac{1}{3}2\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A\Delta}$, όπου Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Το σημείο Κ συμπίπτει λοιπόν με το κέντρου βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 42

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν i) $|\vec{\alpha}| = 3$, ii) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και οι σταθεροί $\lambda,\mu \in \mathbb{R}^*$.

Αν $(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) \perp (\mu\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta})$ να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) \perp (\mu\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})(\mu\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\mu\vec{\alpha}^2 - \lambda^2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \mu^2\vec{\alpha}\vec{\beta} - \lambda\mu\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda\mu|\vec{\alpha}|^2 - \lambda\mu|\vec{\beta}|^2 = 0$, ($\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$ διότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$)

και εφόσον $\lambda\mu \neq 0$ έχουμε $|\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 3^2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 3$.

Επομένως $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} =$

$= |\vec{\alpha}|^2 + 4|\vec{\beta}|^2 = 9 + 4\cdot 9 = 45$ αφού $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 3$.

Ωστε $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = \sqrt{45}$.

ΘΕΜΑ 43

Έστω ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει

▶



$$\varkappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \varrho\vec{\gamma} = \vec{0} \text{ όπου } \varkappa,\lambda,\varrho \in \mathbb{R} \text{ με } \varkappa\lambda\varrho \neq 0$$

και τέτοιοι ώστε να είναι

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\lambda^2 + \varrho^2},\ |\vec{\beta}| = \sqrt{\varrho^2 + \varkappa^2},\ |\vec{\gamma}| = \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2}$$

α) Να βρείτε συναρτήσει των $\varkappa, \lambda, \varrho$ το άθροισμα

$$\Sigma = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha}.$$

β) Να δείξετε ότι θα είναι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ τότε και μόνο, όταν είναι $\varkappa = \lambda = \varrho$.

ΛΥΣΗ

α) Εχουμε $\lambda\vec{\beta} + \varrho\vec{\gamma} = -\varkappa\vec{\alpha}$, οπότε $|\lambda\vec{\beta} + \varrho\vec{\gamma}|^2 = \varkappa^2|\vec{\alpha}|^2$ και

$\lambda^2|\vec{\beta}|^2 + \varrho^2|\vec{\gamma}|^2 + 2\lambda\varrho\vec{\beta}\vec{\gamma} = \varkappa^2|\vec{\alpha}|^2$. Βρίσκουμε λοιπόν

$2\lambda\varrho\vec{\beta}\vec{\gamma} = \varkappa^2(\lambda^2 + \varrho^2) - \lambda^2(\varrho^2 + \varkappa^2) - \varrho^2(\varkappa^2 + \lambda^2) = -2\lambda^2\varrho^2$

οπότε $\vec{\beta}\vec{\gamma} = -\lambda\varrho$. Όμοια παίρνουμε $\vec{\gamma}\vec{\alpha} = -\varrho\varkappa$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -\varkappa\lambda$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι

$\Sigma = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha} = -(\varkappa\lambda + \lambda\varrho + \varrho\varkappa)$.

β) Έστω ότι είναι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Τότε είναι και

$|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = 0$, δηλαδή $|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha}) = 0$

και τελικά $2(\varkappa^2 + \lambda^2 + \varrho^2) - 2(\varkappa\lambda + \lambda\varrho + \varrho\varkappa) = 0$ οπότε

$(\varkappa - \lambda)^2 + (\lambda - \varrho)^2 + (\varrho - \varkappa)^2 = 0$ και έχουμε $\varkappa - \lambda = \lambda - \varrho = \varrho - \varkappa = 0$

δηλαδή $\varkappa = \lambda = \varrho$.

Αντίστροφα: Αν είναι $\varkappa = \lambda = \varrho$, θα είναι και

$\vec{0} = \varkappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \varrho\vec{\gamma} = \varkappa(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})$, οπότε

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, (αφού $\varkappa \neq 0$).

ΘΕΜΑ 44

α) Για τυχαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ να δείξετε

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 + |\vec{\beta} - \vec{\gamma}|^2 + |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}|^2 = 3\left(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2\right)$$



▶

β) Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνα R. Να δείξετε ότι θα είναι

$$|\vec{AB}|^2 + |\vec{B\Gamma}|^2 + |\vec{\Gamma A}|^2 \le 9R^2 \quad \text{(Συνθήκη ισότητας)}$$

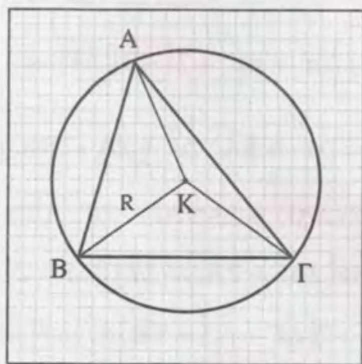
ΛΥΣΗ

α) Είναι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 =$

$= |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\vec{\gamma} + 2\vec{\beta}\vec{\gamma}$

Επίσης $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$ κ.λπ.

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε το ζητούμενο.



β) Είναι $\vec{B\Gamma} = \vec{K\Gamma} - \vec{KB}$, $\vec{\Gamma A} = \vec{KA} - \vec{K\Gamma}$,

$\vec{AB} = \vec{KB} - \vec{KA}$ οπότε

$$|\vec{B\Gamma}|^2 + |\vec{\Gamma A}|^2 + |\vec{AB}|^2 = |\vec{KA} - \vec{KB}|^2 + |\vec{KB} - \vec{K\Gamma}|^2 + |\vec{K\Gamma} - \vec{KA}|^2$$

Είναι λοιπόν

$$|\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{K\Gamma}|^2 + |\vec{B\Gamma}|^2 + |\vec{\Gamma A}|^2 + |\vec{AB}|^2 = 3\left(|\vec{KA}|^2 + |\vec{KB}|^2 + |\vec{K\Gamma}|^2\right) = 9R^2$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι

$$|\vec{B\Gamma}|^2 + |\vec{\Gamma A}|^2 + |\vec{AB}|^2 \le 9R^2$$

Η ισότητα ισχύει τότε και μόνο, όταν $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{K\Gamma} = \vec{0}$ δηλαδή όταν και μόνο, το Κ είναι και κέντρο βάρους του τριγ. ΑΒΓ. Τούτο όμως ισχύει στην περίπτωση και μόνο που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

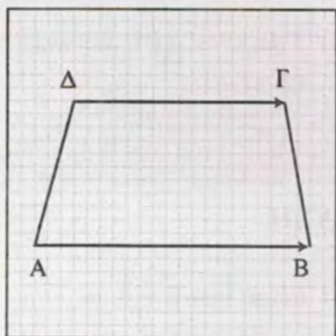
ΘΕΜΑ 45

Αν για το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ // ΒΓ ισχύει

$$(A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 = (A\Delta)^2 + (B\Gamma)^2 + 2(AB)\,(\Delta\Gamma)$$

να δείξετε ότι είναι τραπέζιο και αντιστρόφως.

ΛΥΣΗ



Έχουμε

$(A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 = (A\Delta)^2 + (B\Gamma)^2 + 2(AB)\,(\Delta\Gamma)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}^2 + \overrightarrow{B\Delta}^2 = \overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{B\Gamma}^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow$

$\left(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)^2 + \left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)^2 = \overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{B\Gamma}^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{A\Delta}\,\overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma}^2 + \overrightarrow{\Gamma\Delta}^2 + 2\overrightarrow{B\Gamma}\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} =$

$= \overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{B\Gamma}^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{A\Delta}\,\overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}^2 + 2\overrightarrow{B\Gamma}\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{A\Delta}\,\overrightarrow{\Delta\Gamma} - 2\overrightarrow{B\Gamma}\,\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{\Delta\Gamma} + 2\overrightarrow{A\Delta} - 2\overrightarrow{B\Gamma}\right)\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}\right)\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{\Delta\Gamma} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}|\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}}\right) = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Leftrightarrow$

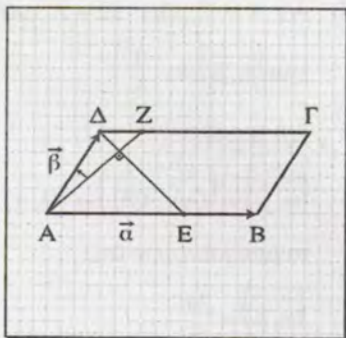
$\Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 46

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $(AB) = 2$, $(A\Delta) = 1$ και $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Αν Ε είναι σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ και η κάθετος από το Α στην ΔΕ τέμνει την ΔΓ στο σημείο Ζ να δείξετε ότι

i) $\overrightarrow{\Delta Z} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, ii) $\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{A\Delta}}\right) = \frac{6}{\sqrt{39}}$

ΛΥΣΗ



i) Θέτουμε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Οπότε $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\vec{\alpha}$ και υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{\Delta Z} = \lambda\vec{\alpha}$.

Έχουμε $\overrightarrow{AZ} \perp \overrightarrow{\Delta E} \Leftrightarrow \overrightarrow{AZ}\,\overrightarrow{\Delta E} = 0 \Leftrightarrow$

$\left(\vec{\beta} + \lambda\vec{\alpha}\right)\left(-\vec{\beta} + \frac{2}{3}\vec{\alpha}\right) = 0$

δηλαδή $-\vec{\beta}^2 + \frac{2}{3}\vec{\alpha}\vec{\beta} - \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta} + \frac{2}{3}\lambda\vec{\alpha}^2 = 0 \Leftrightarrow$

$-|\vec{\beta}|^2 + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) + \frac{2}{3}\lambda|\vec{\alpha}|^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1^2 + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)2 \cdot 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\lambda 2^2 = 0$ και τελικά $\lambda = \frac{1}{5}$. Άρα $\overrightarrow{\Delta Z} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

ii) Εχουμε $\overrightarrow{AZ}\,\overrightarrow{A\Delta} = \left(\vec{\beta} + \frac{1}{5}\vec{\alpha}\right)\vec{\beta} = \vec{\beta}^2 + \frac{1}{5}\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\beta}|^2 + \frac{1}{5}|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) =$

$= 1^2 + \frac{1}{5}2 \cdot 1\,\frac{1}{2} = \frac{6}{5}$. Επίσης $|\overrightarrow{AZ}|^2 = \overrightarrow{AZ}^2 = \left(\vec{\beta} + \frac{1}{5}\vec{\alpha}\right)^2 =$

$= \vec{\beta}^2 + \frac{1}{25}\vec{\alpha}^2 + 2\,\frac{1}{5}\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\beta}|^2 + \frac{1}{25}|\vec{\alpha}|^2 + \frac{2}{5}|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) =$

$= 1^2 + \frac{1}{25}2^2 + \frac{2}{5}2 \cdot 1\,\frac{1}{2} = \frac{39}{25}$. Άρα $|\overrightarrow{AZ}| = \frac{\sqrt{39}}{5}$.

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{A\Delta}}\right) = \frac{\overrightarrow{AZ}\,\overrightarrow{A\Delta}}{|\overrightarrow{AZ}||\overrightarrow{A\Delta}|} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{\sqrt{39}}{5}} = \frac{6}{\sqrt{39}}$.

ΘΕΜΑ 47

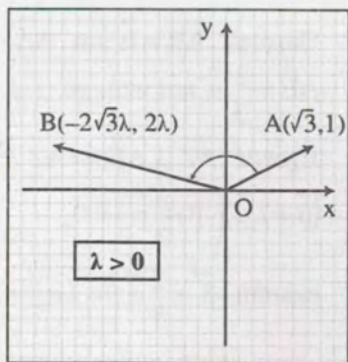
Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{\beta} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3}\lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$$

ΛΥΣΗ

Εχουμε $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{\sqrt{3}(-2\sqrt{3}\lambda) + 2\lambda}{\sqrt{3+1}\sqrt{12\lambda^2 + 4\lambda^2}} = \frac{-4\lambda}{2 \cdot 4|\lambda|} = \frac{-\lambda}{2|\lambda|}$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις



i) Αν $\lambda > 0$ τότε $|\lambda| = \lambda$ οπότε

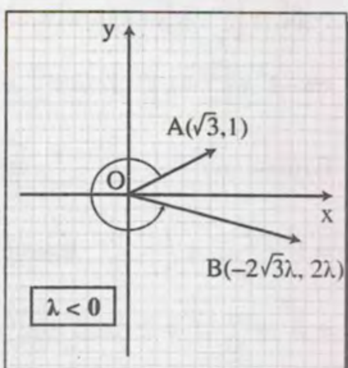
$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = -\frac{1}{2}$$

και αφού

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \in (0,\pi)$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$



ii) Αν $\lambda < 0$ τότε $|\lambda| = -\lambda$ οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{1}{2}$$ και εφόσον

και αφού

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \in (\pi,2\pi)$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

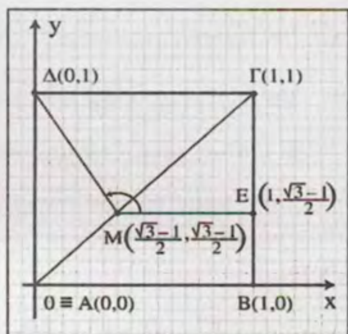
$$\text{Ώστε } \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3}, & \text{αν } \lambda > 0 \\ \dfrac{5\pi}{3}, & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 48

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta}}\right) = \frac{\pi}{2}$ και σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AM} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Από το Μ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{M\Delta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε σύστημα αναφοράς τέτοιο ώστε A(0, 0), B(1, 0), Γ(1, 1) και Δ(0, 1). Οπότε

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AM}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{bmatrix}$$

Δηλαδή $M\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, και $E\left(1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Συνεπώς $\overrightarrow{ME}=\begin{bmatrix}\frac{3-\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{bmatrix}$ και $\overrightarrow{M\Delta}=\begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$. Έχουμε λοιπόν

$$\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{M\Delta}}\right)=\frac{\overrightarrow{ME}\,\overrightarrow{M\Delta}}{|\overrightarrow{ME}||\overrightarrow{M\Delta}|}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{16-8\sqrt{3}}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{-2(1-\sqrt{3})}=-\frac{1}{2}.$$

Άρα $\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{M\Delta}}\right)=\text{συν}\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{M\Delta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$ ή $\left(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{M\Delta}}\right)=2\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

Όμως $\left(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{M\Delta}}\right)<\pi$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{M\Delta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ 49

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οπία ισχύουν

$|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|=3|\vec{\gamma}|$ **και** $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\pi}{6}$ **καθώς επίσης και**

$\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)$ **και** $\pi<\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)<2\pi$



▶

i) **Να βρείτε τις γωνίες $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ και $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$**

ii) **Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώστες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και η άλλη παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\beta}$.**

ΛΥΣΗ

i) Εχουμε $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}+4\vec{\beta})$. Δηλαδή $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+4\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\beta}-4\vec{\beta}^2=0 \Leftrightarrow$$

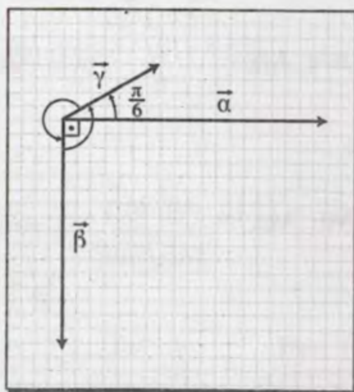
$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2+3|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})-4|\vec{\beta}|^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|\vec{\beta}|^2+3\cdot 2|\vec{\beta}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})-4|\vec{\beta}|^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{3\pi}{2}, \text{ διότι}$$

$\pi<(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})<2\pi$. Οπότε

$$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})+(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$$



ii) Έστω $\vec{\gamma}=\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}$ (1)

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τα μέλη της (1) με $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ παίρνουμε αντίστοιχα

$$\begin{cases}\vec{\alpha}\vec{\gamma}=\lambda_1\vec{\alpha}^2+\lambda_2\vec{\alpha}\vec{\beta}\\ \vec{\beta}\vec{\gamma}=\lambda_1\vec{\beta}\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}|=\lambda_1|\vec{\alpha}|^2+\lambda_2 0\\ |\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=\lambda_1 0+\lambda_2|\vec{\beta}|^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3|\vec{\gamma}||\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\lambda_1 9|\vec{\gamma}|^2\\ \frac{3}{2}|\vec{\gamma}||\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=\lambda_2\frac{9}{4}|\vec{\gamma}|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\left(-\frac{1}{2}\right)=9\lambda_1\\ \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}\lambda_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-\frac{1}{6}\\ \lambda_2=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

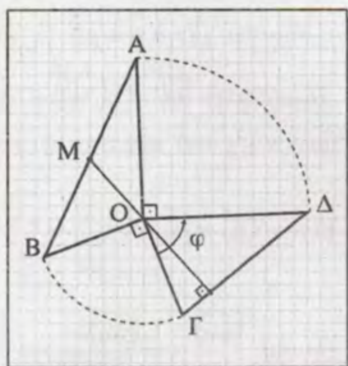
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\vec{\gamma}=-\frac{1}{6}\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ 50

Έστω Μ το μέσον της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΟΑΒ. Θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ που προκύπτουν στρέφοντας τα Β και Α περί το Ο κατά γωνίες $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα και κατά τη θετική φορά.

Να δείξετε ότι είναι $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 2|\overrightarrow{OM}|$.

ΛΥΣΗ



Είναι $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}$

Άρα λοιπόν είναι

$\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma})$ δηλαδή

$\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{O\Delta})$ αφού είναι

$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{O\Gamma} = 0$. Είναι όμως

$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{O\Gamma} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{O\Gamma}|\text{συν}(90° + \varphi)$ και

$\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{O\Delta} = |\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{O\Delta}|\text{συν}(90° + \varphi)$

όπου $\varphi = \Gamma\hat{O}\Delta$ και είναι $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{O\Delta}|$ και $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{O\Gamma}|$ θα είναι λοιπόν

$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{O\Delta}$ και ως εκ τούτου $\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0$

β) Είναι $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}$, οπότε $|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|^2 = |\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}|^2 = |\overrightarrow{O\Delta}|^2 + |\overrightarrow{O\Gamma}|^2 - 2\overrightarrow{O\Gamma}\,\overrightarrow{O\Delta}$

και $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, οπότε $4|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}$

όμως $\overrightarrow{O\Gamma}\,\overrightarrow{O\Delta} = |\overrightarrow{O\Gamma}||\overrightarrow{O\Delta}|\text{συν}\varphi$ και $\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\text{συν}(180° - \varphi)$

Θα έχουμε λοιπόν (αφού $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{O\Delta}|, |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{O\Gamma}|$) και

$4|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|^2$, και τελικά $|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 2|\overrightarrow{OM}|$.

ΘΕΜΑ 51

α) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}, \vec{y}$ διανύσματα του επιπέδου, με $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ και είναι

$\vec{x}\vec{\alpha} = \vec{y}\vec{\alpha}$ και $\vec{x}\vec{\beta} = \vec{y}\vec{\beta}$ να δείξετε ότι $\vec{x} = \vec{y}$

▶

►

β) Αν είναι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{x}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{y}$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{x}=\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{y}$ να δείξετε ότι θα είναι και $\vec{x}=\vec{y}$.

ΛΥΣΗ

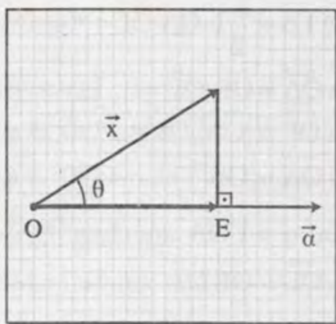
α) Έστω ότι είναι $\vec{x}\vec{\alpha}=\vec{y}\vec{\alpha}$ και $\vec{x}\vec{\beta}=\vec{y}\vec{\beta}$. Τότε $(\vec{x}-\vec{y})\vec{\alpha}=0$ και $(\vec{x}-\vec{y})\vec{\beta}=0$.

Θέτουμε $\vec{\omega}=\vec{x}-\vec{y}$ και έχουμε $\vec{\omega}\vec{\alpha}=\vec{\omega}\vec{\beta}=0$.

Όμως το διάνυσμα $\vec{\omega}$ είναι συνεπίπεδο των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και άρα (αφού $\vec{\alpha}\not\parallel\vec{\beta}$) γράφεται $\vec{\omega}=\lambda\vec{\alpha}+\varrho\vec{\beta}$ ($\lambda,\varrho\in\mathbb{R}$).

Προκύπτει $|\vec{\omega}|^2=\lambda(\vec{\alpha}\vec{\omega})+\varrho(\vec{\beta}\vec{\omega})=0$, οπότε $|\vec{\omega}|=0$ και ως εκ τούτου $\vec{\omega}=\vec{x}-\vec{y}=\vec{0}$ και τελικά $\vec{x}=\vec{y}$.

β) Είναι $\overrightarrow{OE}=|\vec{x}|\sigma\upsilon\nu\theta\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}=\dfrac{\vec{x}\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha}$ οπότε θα



έχουμε $\dfrac{(\vec{x}\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha}=\dfrac{(\vec{y}\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha}$ και $\dfrac{(\vec{x}\vec{\beta})}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta}=\dfrac{(\vec{y}\vec{\beta})}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta}$

και τελικά $\vec{x}\vec{\alpha}=\vec{y}\vec{\alpha}$ και $\vec{x}\vec{\beta}=\vec{y}\vec{\beta}$.

Συμπεραίνουμε πάλι ότι έχουμε $\vec{x}=\vec{y}$.

ΘΕΜΑ 52

Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τρία διανύσματα του επιπέδου τέτοια ώστε

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \text{ και } \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

i) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}\parallel\vec{\alpha}$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\parallel\vec{\beta}$. Όμως

$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}=-1\cdot 2+2\cdot 1=0$. Δηλαδή $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}\perp\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}$. Άρα $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

ii) Επειδή $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma} \not\parallel \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}$ το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$ και $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}$, κατά μοναδικό τρόπο.

Δηλαδή υπάρχουν (μοναδικοί) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\vec{\gamma} = \lambda_1 \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma} + \lambda_2 \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$ και $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}$, παίρνουμε αντίστοιχα

$$\begin{cases} \vec{\gamma}\,\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma} = \lambda_1\left(\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}\right)^2 + \lambda_2\left(\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}\right) \\ \vec{\gamma}\,\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} = \lambda_1\left(\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}\cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\right) + \lambda_2\left(\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}\right|^2 = \lambda_1\left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}\right|^2 + \lambda_2 0 \\ \left|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\right|^2 = \lambda_1 0 + \lambda_2\left|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}\right|^2 \end{cases}$$

Βρίσκουμε λοιπόν $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$. Οπότε $\vec{\gamma} = 1\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

ΘΕΜΑ 53

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{M\Gamma}$ να είναι κάθετο προς το διάνυσμα $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma}$.

ΛΥΣΗ

Εχουμε $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{M\Gamma} = 3\overrightarrow{M\Delta} + 6\overrightarrow{M\Gamma}$ (Το Δ χωρίζει το $\overrightarrow{AB}$ σε λόγο 2. Δηλαδή $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$)

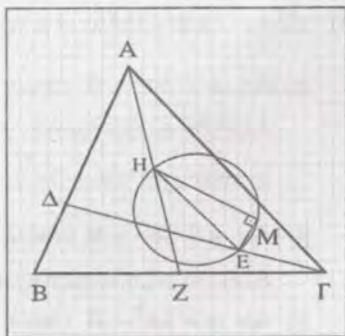
$= 3\left(\overrightarrow{M\Delta} + 2\overrightarrow{M\Gamma}\right) = 3\cdot 3\overrightarrow{ME} = 9\overrightarrow{ME}$ (Το Ε χωρίζει το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ σε λόγο 2. Δηλαδή $\overrightarrow{\Delta E} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$)

Επίσης $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MZ} =$
$= 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MZ}\right) = 2\cdot 2\overrightarrow{MH} = 4\overrightarrow{MH}$

(Όπου Ζ το μέσο του ΒΓ και Η το μέσο του ΑΖ)

Οπότε $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{ME} \perp 4\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MH}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο το ΕΗ.



ΘΕΜΑ 54

Έστω Α, Β δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με (ΑΒ) = α και P το σημείο που χωρίζει το $\overrightarrow{AB}$ σε λόγο λ = –2.

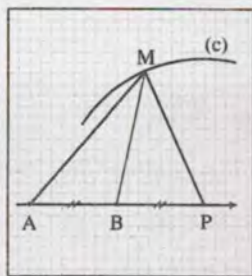
i) Να δείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει

$$2\overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MP}^2 - 2\alpha^2$$

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει

$2\overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = \varkappa$ (όπου ϰ δεδομένος πραγματικός αριθμός)

ΛΥΣΗ



i) Το P χωρίζει το $\overrightarrow{AB}$ σε λόγο λ = –2

Δηλαδή $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PB}$ (1). Έχουμε:

$2\overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = 2(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PB})^2 - (\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA})^2 =$

$2(\overrightarrow{MP}^2+\overrightarrow{PB}^2+2\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{PB}) - (\overrightarrow{MP}^2+\overrightarrow{PA}^2+2\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{PA})$

$= 2\overrightarrow{MP}^2+2\overrightarrow{PB}^2+4\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{MP}^2-\overrightarrow{PA}^2-2\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{PA} =$

$\overset{(1)}{=} \overrightarrow{MP}^2+2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}\right)^2+4\overrightarrow{MP}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}\right)-\overrightarrow{PA}^2-2\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{PA} =$

$= \overrightarrow{MP}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}^2+2\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PA}^2-2\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MP}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}^2 = \overrightarrow{MP}^2-\frac{1}{2}(2\overrightarrow{BA})^2 =$

$= \overrightarrow{MP}^2 - 2|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{MP}^2 - 2\alpha^2.$

ii) Είναι $2\overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = \varkappa \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}^2 - 2\alpha^2 = \varkappa \Leftrightarrow |\overrightarrow{MP}|^2 = \varkappa + 2\alpha^2$ (2)

α) Αν $\varkappa + 2\alpha^2 > 0$ τότε η (2) γίνεται $|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\varkappa + 2\alpha^2}$.

Δηλαδή ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο P και ακτίνα $\varrho = \sqrt{\varkappa + 2\alpha^2}$.

β) Αν $\varkappa + 2\alpha^2 = 0$ τότε η (2) γίνεται $|\overrightarrow{MP}| = 0$ οπότε $M \equiv P$.

Δηλαδή ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το σημείο P.

γ) Αν $\varkappa + 2\alpha^2 < 0$ τότε η (2) είναι δύνατη.

Άρα δεν υπάρχουν σημεία Μ που να την ικανοποιούν.

ΘΕΜΑ 55

Θεωρούμε δύο (σταθερά) σημεία Α και Β με απόσταση (ΑΒ)=2α>0. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία είναι

$$\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB} = \varrho \quad (1)$$

όπου ϱ δεδομένος πραγματικός αριθμός.

ΛΥΣΗ

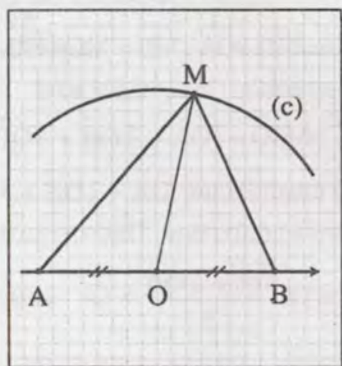
Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ, με την ιδιότητα $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB} = \varrho$. Τότε, αν Ο είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, θα έχουμε

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}$.

Βρίσκουμε $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)=$

$=\left|\overrightarrow{MO}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$ και η συνθήκη (1) γίνεται

$\left|\overrightarrow{MO}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=\varrho$ δηλαδή $\left|\overrightarrow{MO}\right|^2=\alpha^2+\varrho$ (2)



● Μετατρέπουμε τη συνθήκη $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB}=\varrho$ σε ισοδύναμη, στην οποία να εμφανίζεται ένα μόνο μεταβλητό διάνυσμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ (Ο ≡ μέσο του ΑΒ)

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

α) $\alpha^2+\varrho>0$. Η (2) γίνεται ισοδύναμα

$\left|\overrightarrow{MO}\right|=\sqrt{\alpha^2+\varrho}$ δηλαδή $\left|\overrightarrow{MO}\right|=R$

όπου τέθηκε $R=\sqrt{\alpha^2+\varrho}$

Ο γεωμ. τόπος του Μ είναι κύκλος (C) με κέντρο Ο και ακτίνα R.

β) $\alpha^2+\varrho=0$. Η (2) γίνεται $\left|\overrightarrow{MO}\right|=0$ και αληθεύει τότε και μόνο, όταν το σημείο Μ ταυτίζεται με το μέσο Ο του ΑΒ. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το σημείο Ο.

γ) $\alpha^2+\varrho<0$. Η συνθήκη $\left|\overrightarrow{MO}\right|=\alpha^2+\varrho$, οπότε και η $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB}=\varrho$ δεν ικανοποιείται από κανένα σημείο του επιπέδου Ο. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι λοιπόν το κενό (∅) σύνολο σημείων του επιπέδου.

ΘΕΜΑ 56

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου του τριγώνου, για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{M\Gamma} \parallel \overrightarrow{B\Gamma} \quad (\Sigma)$$

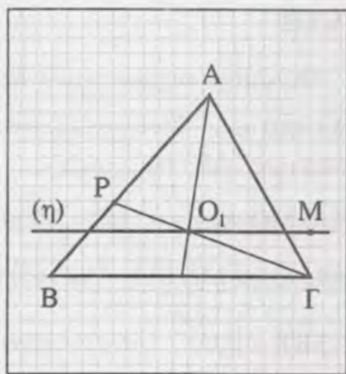
ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο Ο σαν σημείο αναφοράς. Θα έχουμε τότε

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{O\Gamma}$

Η συνθήκη (Σ) γίνεται τότε

$$6\overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{O\Gamma}\right) \parallel \overrightarrow{B\Gamma} \quad (2)$$



Το αποτέλεσμα $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{O\Gamma}$ βρίσκεται σαν ένα διάνυσμα. Παρατηρούμε προς τούτο ότι έχουμε $\dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3} = \overrightarrow{OP}$ όπου Ρ το σημείο της πλευράς ΑΒ, με (ΑΒΡ) = 2 (μερικός λόγος) δηλαδή με $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$.

Έχουμε λοιπόν

$$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{O\Gamma}=3\overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{O\Gamma}=3\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{O\Gamma}\right)$$

Αλλά $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{O\Gamma} = 2\overrightarrow{OO_1}$ όπου O_1 το μέσο του τμήματος ΡΓ.

● Επιλέγοντας ένα σημείο αναφοράς Ο, εκφράζουμε τον γρ. συνδυασμό $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{M\Gamma}$ συναρτήσει ενός και μόνο μεταβλητού διανύσματος θέσεως, του $\overrightarrow{OM}$

Βρίσκουμε τελικά $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{O\Gamma} = 6\overrightarrow{OO_1}$ και η συνθήκη (2) γίνεται

$$6\overrightarrow{MO} + 6\overrightarrow{OO_1} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$$

δηλαδή $6\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO_1}\right) \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$ και $6\overrightarrow{MO_1} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$. Η συνθήκη (Σ) παίρνει τελικά τη μορφή $\overrightarrow{MO_1} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$. Ο ζητούμενος γ. τόπος είναι λοιπόν η ευθεία (η) που διέρχεται από το μέσο O_1 του ΡΓ και είναι // ΒΓ.

Παρατήρηση: Ο τρόπος με τον οποίο λύθηκε το πρόβλημα είναι γενικός και εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε γρ. συνδυασμό των $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{M\Gamma}$. Ανάλογα όμως με

τους συντελεστές του γρ. συνδυασμού, ενδέχεται να φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με ευκολότερο τρόπο. Για παράδειγμα θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα, με την ακόλουθη όμως συνθήκη

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}\parallel\overrightarrow{B\Gamma}\quad(\Sigma)$$

ΛΥΣΗ

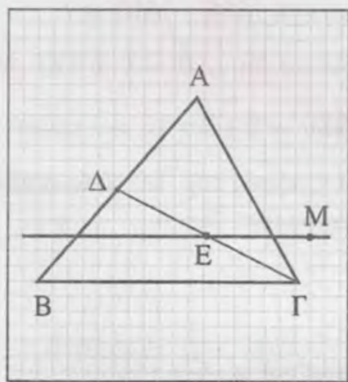
Έχουμε $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{M\Delta}$ όπου Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.

Τότε όμως έχουμε επίσης

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}=2\overrightarrow{M\Delta}+2\overrightarrow{M\Gamma}=2\left(\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{M\Gamma}\right)$$

Αλλά $\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{M\Gamma}=2\overrightarrow{ME}$ όπου Ε το μέσο του τμήματος ΔΓ (Ε = σταθ.). Η συνθήκη (Σ) γίνεται λοιπόν $4\overrightarrow{ME}\parallel\overrightarrow{B\Gamma}$, δηλαδή $\overrightarrow{ME}\parallel\overrightarrow{B\Gamma}$.

Ο ζητούμενος γ. τόπος είναι η ευθεία που διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΓΔ και είναι παράλληλη προς την ΒΓ.



● Ο γρ. συνδυασμός $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}$ εκφράζεται συναρτήσει ενός και μόνο μεταβλητού διανύσματος θέσεως, $\overrightarrow{ME}$ είναι δηλαδή

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}=4\overrightarrow{ME}$$

και η συνθήκη (Σ) παίρνει τη μορφή

$$\overrightarrow{ME}\parallel\overrightarrow{B\Gamma}$$

ΘΕΜΑ 57

Έστω Α, Β σταθερά σημεία του επιπέδου, τέτοια ώστε να είναι $|\overrightarrow{AB}|=3$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία είναι

$$\overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}\right)=7\quad(\Sigma)$$

(Θέμα εισαγωγικών εξετάσεων Α Δέσμης)

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$ και

$$\vec{AM} - 2\vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BM} - 2\vec{AB} = \vec{BM} - \vec{AB}$$

Η συνθήκη (Σ) γίνεται

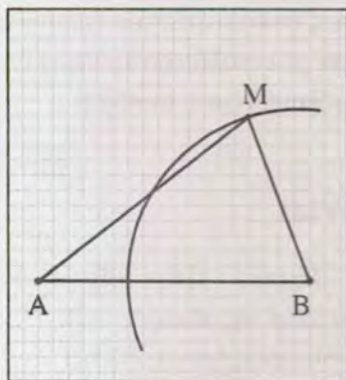
$$\left(\vec{BM} + \vec{AB}\right)\left(\vec{BM} - \vec{AB}\right) = 7$$

δηλαδή $\left|\vec{BM}\right|^2 - \left|\vec{AB}\right|^2 = 7$

και επειδή $\left|\vec{AB}\right| = 3$ η (Σ) παίρνει τη μορφή

$\left|\vec{BM}\right|^2 = 9 + 7 = 16$ και τελικά γίνεται $\left|\vec{BM}\right| = 4$

Ο γ. τόπος του M είναι ο κύκλος με κέντρο B και ακτίνα $R = 4$.



● Μετασχηματίζουμε τη συνθήκη (Σ) παίρνοντας σαν σημείο αναφοράς το B.

ΘΕΜΑ 58

Έστω A, B σταθερά σημεία του επιπέδου με $\left|\vec{AB}\right| = 5\alpha > 0$. Να βρείτε τον γεωμ. τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία είναι

$$4\left|\vec{MA}\right|^2 - 9\left|\vec{MB}\right|^2 = 55\alpha^2 \quad (\Sigma)$$

ΛΥΣΗ

Η (Σ) είναι $\left(2\vec{MA} + 3\vec{MB}\right)\left(2\vec{MA} - 3\vec{MB}\right) = 55\alpha^2$

Για τυχαία σημεία P και Σ του επιπέδου, είναι $\vec{MA} = \vec{MP} + \vec{PA}$ και $\vec{MB} = \vec{MP} + \vec{PB}$

οπότε $2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 5\vec{MP} + 2\vec{PA} + 3\vec{PB}$

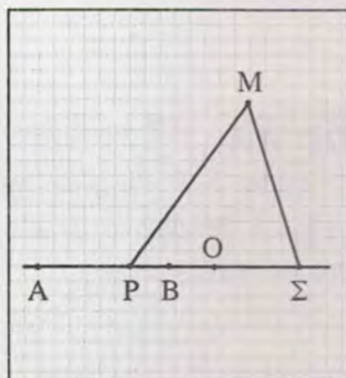
Επιλέγουμε το P, έτσι ώστε να είναι

$$2\vec{PA} + 3\vec{PB} = \vec{O}$$

δηλαδή $2\vec{PB} + 2\vec{BA} + 3\vec{PB} = \vec{O}$

και τελικά $5\vec{PB} = -2\vec{BA} = 2\vec{AB}$. Το P πρέπει να είναι το σημείο του τμήματος AB με

$\vec{PB} = \frac{2}{5}\vec{AB}$ και $\left|\vec{PB}\right| = \frac{2}{5}\left|\vec{AB}\right| = 2\alpha$.



● Μετασχηματίζουμε τη συνθήκη (Σ) σε ισοδύναμή της και απλής μορφής και της οποίας να βρίσκεται εύκολα ο γ. τόπος.

Είναι όμοια

$2\vec{MA} - 3\vec{MB} = 2\vec{M\Sigma} + 2\vec{\Sigma A} - 3\vec{M\Sigma} - 3\vec{\Sigma B}$

δηλαδή $2\vec{MA} - 3\vec{MB} = -\vec{M\Sigma} + 2\vec{\Sigma A} - 3\vec{\Sigma B}$

Επιλέγουμε το σημείο Σ έτσι ώστε να είναι

$2\vec{\Sigma A} - 3\vec{\Sigma B} = \vec{O}$, οπότε $2\vec{\Sigma B} + 2\vec{BA} - 3\vec{\Sigma B} = \vec{O}$

και $-\vec{\Sigma B} + 2\vec{BA} = \vec{O}$ και τελικά $\vec{\Sigma B} = 2\vec{BA}$

Το Σ είναι σημείο της προέκτασης του ΑΒ προς το μέρος του Β και έχουμε

$2\vec{MA} - 3\vec{MB} = -\vec{M\Sigma} + 2\vec{\Sigma A} - 3\vec{\Sigma B} = -\vec{M\Sigma}$

Η (Σ) γίνεται $(5\vec{MP})(-\vec{M\Sigma}) = 55\alpha^2$ δηλαδή

$-5\vec{MP}\vec{M\Sigma} = 55\alpha^2$ και τελικά $\vec{MP}\vec{M\Sigma} = -11\alpha^2$

Προς τούτο θα βρούμε τα αποτελέσματα των γρ. συνδυασμών.

$2\vec{MA} + 3\vec{MB}$ και $2\vec{MA} - 3\vec{MB}$

συναρτήσει των διανυσμάτων

$\vec{MP}$ και $\vec{M\Sigma}$, ορίζοντας κατάλληλα το σημείο Ρ και Σ στην ευθεία ΑΒ. Επιλέγοντας τα Ρ και Σ ώστε να είναι

$2\vec{PA} + 3\vec{PB} = \vec{O}$ και $2\vec{\Sigma A} - 3\vec{\Sigma B} = \vec{O}$

βρίσκουμε

$\vec{MA} = 5\vec{MP}$ και $\vec{MB} = -\vec{M\Sigma}$

και η συνθήκη (Σ) γίνεται

$\vec{MP}\,\vec{M\Sigma} = -11\alpha^2$.

Έστω τώρα Ο το μέσο του ΡΣ. Είναι τότε $\vec{MP} = \vec{MO} + \vec{OP}$ και $\vec{M\Sigma} = \vec{MO} + \vec{O\Sigma}$

Η συνθήκη $\vec{MP}\vec{M\Sigma} = -11\alpha^2$, γίνεται λοιπόν $|\vec{MO}|^2 - |\vec{OP}|^2 = -11\alpha^2$ και είναι

$|\vec{OP}| = 6\alpha$. Η (Σ) γίνεται τελικά $|\vec{MO}|^2 = 36\alpha^2 - 11\alpha^2 = 25\alpha^2$ δηλαδή $|\vec{MO}| = 5\alpha = |\vec{AB}|$

Ο γ. τόπος του Μ είναι ο κύκλος (C) με κέντρο Ο και ακτίνα $R = 5\alpha$.

ΘΕΜΑ 59

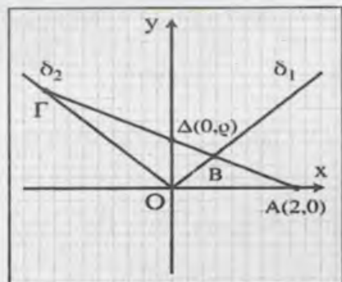
Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) που διέρχεται από το σημείο Α(2,0) και τέμνει τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$ σε σημεία Β, Γ του άνω ημιεπιπέδου, τέτοια ώστε να είναι

$$|\vec{B\Gamma}| = 4$$

ΛΥΣΗ

Έστω Δ(0, ρ) το κοινό σημείο της ευθείας ΑΒΓ με τον άξονα y΄y όπου είναι $\rho > 0$. Η εξίσωση της (η) είναι της μορφής

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{\rho} = 1$$



Αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) τα σημεία Β και Γ, θα έχουμε $x_1 = y_1 > 0$ και $-x_2 = y_2 > 0$ καθώς και

$$\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{\varrho}=1 \text{ και } \frac{-y_2}{2}+\frac{y_2}{\varrho}=1$$

Βρίσκουμε $x_1=\dfrac{2\varrho}{\varrho+2}$, $y_2=\dfrac{2\varrho}{2-\varrho}$ οπότε πρέπει και $\varrho<2$ για να είναι $y_2>0$.

Προκύπτει $(B\Gamma)^2=(x_1+y_2)^2+(x_1-y_2)^2=16$ δηλαδή $2(x_1^2+y_2^2)=16$

και $2\dfrac{4\varrho^2}{(\varrho+2)^2}+2\dfrac{4\varrho^2}{(2-\varrho)^2}=16$

οπότε $8\varrho^2\dfrac{(\varrho+2)^2+(2-\varrho)^2}{(4-\varrho^2)^2}=16$ και $16\varrho^2\dfrac{4+\varrho^2}{(4-\varrho^2)^2}=16$

Προκύπτει λοιπόν $\varrho^2(4+\varrho^2)=(4-\varrho^2)^2$ και μετά τις πράξεις

$$12\varrho^2=16 \text{ δηλαδή } \varrho=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y\sqrt{3}}{2}=1$ δηλαδή $x+y\sqrt{3}=2$.

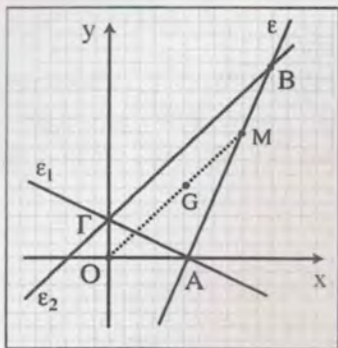
ΘΕΜΑ 60

Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: y=-\dfrac{1}{2}x+1$, $\varepsilon_2: y=x+1$ και Γ το σημείο τομής τους. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{10}{3}\right)$ και τέμνει τις ευθείες ε_1, ε_2 στα σημεία Α, Β αντίστοιχα έτσι ώστε η αρχή των αξόνων Ο, το κέντρο βάρους G του τριγώνου ΑΒΓ και το σημείο Μ να είναι συνευθειακά σημεία.

ΛΥΣΗ

Καταρχήν βρίσκουμε τις συντεταγμένες του Γ

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+1 \\ y=x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=-\frac{1}{2}x+1 \\ y=x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$ Άρα Γ(0, 1)



Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας ε αρκεί να βρούμε ένα τουλάχιστον από τα σημεία Α, Β. Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Οπότε έχουμε

$$A \in \varepsilon_1 \text{ Δηλαδή } y_1 = -\frac{1}{2}x_1 + 1 \quad (1)$$

και $B \in \varepsilon_2$ Δηλαδή $y_2 = x_2 + 1 \quad (2)$

Άρα το κέντρο βάρους του ΑΒΓ είναι το σημείο

$$G\left(\frac{x_1+x_2+0}{3}, \frac{y_1+y_2+1}{3}\right) \text{δηλαδή } G\left(\frac{x_1+x_2}{3}, \frac{-\frac{1}{2}x_1+x_2+3}{3}\right)$$

Τα σημεία O, G, M είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x_1+x_2}{3} & \frac{-\frac{1}{2}x_1+x_2+3}{3} & 1 \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1+x_2 & -\frac{1}{2}x_1+x_2+3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2.$$

Οπότε από την (1) βρίσκουμε $y_1 = 0$ και άρα $A(2, 0)$

$$\text{Ώστε } \lambda_\varepsilon = \lambda_{AM} = \frac{\frac{10}{3} - 0}{\frac{10}{3} - 2} = \frac{5}{2} \text{ και } \varepsilon\text{: } y - 0 = \frac{5}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x - 5.$$

ΘΕΜΑ 61

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ η εξίσωση

$$2\alpha x^2 + y^2 + 3\sqrt{\alpha}xy + \alpha x - \alpha = 0 \quad (1)$$

παριστάνει δύο ευθείες.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $2\alpha x^2 + y^2 + 3\sqrt{\alpha}xy + \alpha x - \alpha = 0 \Leftrightarrow y^2 + 3\sqrt{\alpha}xy + (2\alpha x^2 + \alpha x - \alpha) = 0$

$\Delta = 9\alpha x^2 - 4(2\alpha x^2 + \alpha x - \alpha) = 9\alpha x^2 - 8\alpha x^2 - 4\alpha x + 4\alpha = \alpha x^2 - 4\alpha x + 4\alpha =$
$= \alpha x^2 - 4\alpha x + 4\alpha = \alpha(x^2 - 4x + 4) = \alpha(x-2)^2.$

Δηλαδή $y = \dfrac{-3\sqrt{\alpha}x \pm \sqrt{\alpha}|x-2|}{2} \Leftrightarrow 2y = -3\sqrt{\alpha}x \pm \sqrt{\alpha}(x-2)$

και τελικά $y=-\sqrt{\alpha}x-\sqrt{\alpha}$ ή $y=-2\sqrt{\alpha}x+\sqrt{\alpha}$

Άρα για κάθε $\alpha>0$ η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες τις:
ε_1: $y=-\sqrt{\alpha}x-\sqrt{\alpha}$ και ε_2: $y=-2\sqrt{\alpha}x+\sqrt{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 62

Να βρείτε την τιμή του $\varkappa\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$(\varkappa\lambda+\mu-\varkappa)x+(\varkappa\lambda+\varkappa\mu)y+(\varkappa+1)=0 \quad (1)$$

να παριστάνει ευθεία γραμμή.

Στη συνέχεια να δείξετε ότι όλες οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν το σύστημα $\begin{cases}\varkappa\lambda+\mu-\varkappa=0\\ \varkappa\lambda+\varkappa\mu=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varkappa\lambda+\mu=\varkappa\\ \varkappa\lambda+\varkappa\mu=0,\ \varkappa\in\mathbb{R}\end{cases}$ (Σ) είναι αδύνατο

Άρα $D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\varkappa & 1\\ \varkappa & \varkappa\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \varkappa^2-\varkappa=0 \Leftrightarrow \varkappa=0$ ή $\varkappa=1$

Αν $\varkappa=0$ το (Σ) γίνεται $\begin{cases}\mu=0\\ 0=0\end{cases}$, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(\lambda,\mu)=(\lambda,0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν $\varkappa=1$ το (Σ) γίνεται $\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda+\mu=0\end{cases}$ αδύνατο

Ώστε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν $\varkappa=1$.

Για $\varkappa=1$ η (1) γίνεται $(\lambda+\mu-1)x+(\lambda+\mu)y+2=0$ (2).

Έστω ότι όλες οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από το σημείο $K(x_0, y_0)$. Δηλαδή για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $(\lambda+\mu-1)x_0+(\lambda+\mu)y_0+2=0$.

Για $\lambda=0$ και $\mu=0$ παίρνουμε $-x_0+2=0 \Leftrightarrow x_0=2$.

Για $\lambda=0$ και $\mu=1$ παίρνουμε $y_0+2=0 \Leftrightarrow y_0=-2$.

Αντιστρόφως αν $(x_0,y_0)=(2,-2)$ έχουμε $(\lambda+\mu-1)x_0+(\lambda+\mu)y_0+2=$

$=(\lambda+\mu-1)2+(\lambda+\mu)(-2)+2=2\lambda+2\mu-2-2\lambda-2\mu+2=0$, για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Άρα όλες οι ευθείες με εξίσωση (2) διέρχονται από το σημείο $K(2,-2)$.

ΘΕΜΑ 63

Έστω ότι το σημείο Μ διαγράφει την παραβολή (c) με εξίσωση $y = x^2$, ενώ Α, Β, Γ είναι σταθερά σημεία του επιπέδου, τέτοια ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση

$$\left(1 + \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OM}\right)x + \left(1 + \overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OM}\right)y + 1 + \overrightarrow{O\Gamma}\,\overrightarrow{OM} = 0$$

να διέρχεται από σταθερό σημείο Ρ.
Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

Το σύνολο των σημείων της παραβολής (c), αποτελείται από εκείνα ακριβώς τα σημεία, που έχουν συντεταγμένες της μορφής (t, t^2) με $t \in \mathbb{R}$. Οι συντεταγμένες λοιπόν του Μ είναι της μορφής (t, t^2) όπου t μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.
Έστω τώρα (α_1, α_2), (β_1, β_2) και (γ_1, γ_2) οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ αντίστοιχα. Θα έχουμε

● Παραμετρική παράσταση του συνόλου των σημείων της παραβολής $y=x^2$. Θέτοντας $x = t$, παίρνουμε $y = t^2$ για κάθε σημείο (x, y) της παραβολής. Αντίστροφα, κάθε σημείο με συντεταγμένες (t, t^2) για $t \in \mathbb{R}$, είναι σημείο της παραβολής αυτής.

$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OM} = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OM} = \beta_1 t + \beta_2 t^2$ και $\overrightarrow{O\Gamma}\,\overrightarrow{OM} = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2$.
Η εξίσωση της ευθείας (η) γίνεται

$(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)x + (1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)y + 1 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 = 0$ με $t \in \mathbb{R}$

και γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$(x + y + 1) + (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)t + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)t^2 = 0 \quad (1)$

Εφ' όσον η (η) διέρχεται από σταθερό σημείο P(x, y), θα πρέπει, για τις συντεταγμένες x, y τούτου, να αληθεύει η (1) για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Προς τούτο όμως, πρέπει και αρκεί να είναι

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 & \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 & x+y+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

οπότε, τα σημεία $A(\alpha_1, \alpha_2)$, $B(\beta_1, \beta_2)$, $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 64

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(\varkappa,\varkappa)$ με $\varkappa \neq 0$ και που οι συντεταγμένες της επί την αρχή είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\varkappa x^2 - (5\varkappa - 6)x + \varkappa^3 = 0$ (Ε)

ΛΥΣΗ

Έστω ότι (η) είναι μια τέτοια ευθεία με εξίσωση $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ όπου α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης (Ε), $(\alpha, \beta \neq 0)$ και διέρχεται από το σημείο $P(\varkappa, \varkappa)$.

Είναι τότε $\frac{\varkappa}{\alpha} + \frac{\varkappa}{\beta} = 1$ δηλαδή $\varkappa \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 1$ (1).

Όμως $\alpha + \beta = \frac{5\varkappa - 6}{\varkappa}$ και $\alpha\beta = \frac{\varkappa^3}{\varkappa} = \varkappa^2$ (άθροισμα και γινόμενο ριζών της εξίσωσης (Ε)).

Η (1) γίνεται $\varkappa \frac{5\varkappa - 6}{\varkappa^3} = 1$ δηλαδή $\varkappa^2 = 5\varkappa - 6$ και τελικά $\varkappa^2 - 5\varkappa + 6 = 0$.

Βρίσκουμε ότι $\varkappa = 2$ είτε $\varkappa = 3$.

Στην πρώτη περίπτωση η (Ε) γίνεται $2x^2 - 4x + 8 = 0$ δηλαδή $x^2 - 2x + 4 = 0$.

Στη δεύτερη αντίστοιχα η (Ε) γίνεται $3x^2 - 9x + 27 = 0$ δηλαδή $x^2 - 3x + 9 = 0$.

Όμως καμιά από τις εξισώσεις $x^2 - 2x + 4 = 0$ και $x^2 - 3x + 9 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Ως εκ τούτου καμία ευθεία (η) δεν ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του προβλήματος.

ΘΕΜΑ 65

Έστω (ε_λ) η οικογένεια των ευθειών με εξίσωση

$$(\lambda^2 + 1)x + 2\lambda y + (\lambda^2 - 1) = 0 \quad \text{και} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου, που ανήκει σε όλες τις ευθείες (ε_λ)

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, που ανήκουν σε μια και μόνο από τις ευθείες (ε_λ).

ΛΥΣΗ

α) Αν $P(x_0, y_0)$ σημείο που ανήκει σε όλες τις ευθείες της οικογένειας (ε_λ), τότε:

$(\lambda^2+1)x_0 + 2\lambda y_0 + (\lambda^2-1) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
άρα και $(x_0 + 1)\lambda^2 + 2\lambda y_0 + (x_0 - 1) = 0$
Προς τούτο, πρέπει να είναι:
$x_0 + 1 = 0$ και $2y_0 = 0$ και $x_0 - 1 = 0$
δηλαδή $y_0 = 0$ και $x_0 = 1$ και $x_0 = -1$
που είναι αδύνατο να συμβαίνει. Δεν υπάρχει λοιπόν σημείο $P(x_0, y_0)$ που να είναι κοινό όλων των ευθειών (ε_λ).

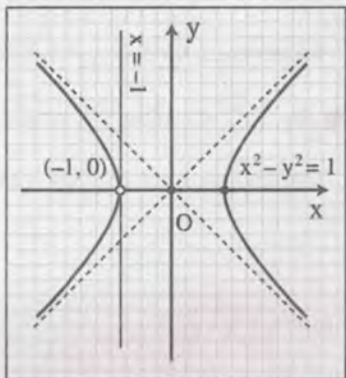
● Η γεωμετρική συνθήκη:
«Υπάρχει σημείο P κοινό $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ όλων των ευθειών της οικογένειας (ε_λ)...» εκφράζεται με την ισοδύναμη αλγεβρική συνθήκη
«Υπάρχουν αριθμοί $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ (ανεξάρτητοι του λ) τέτοιοι ώστε να είναι
$(\lambda^2+1)x_0 + 2\lambda y_0 + (\lambda^2-1) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

β) Έστω $M(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο που περιέχεται σε μία και μόνο από τις ευθείες (ε_λ). Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $(\lambda^2 + 1)x_0 + 2\lambda y_0 + \lambda^2 - 1 = 0$ για ένα και μόνο $\lambda \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα, ότι η ως προς λ εξίσωση $(\lambda^2 + 1)x_0 + 2\lambda y_0 + \lambda^2 - 1 = 0$ (1) έχει μία και μόνο πραγματική λύση.

Η (1) γράφεται $(x_0 + 1)\lambda^2 + 2\lambda y_0 + x_0 - 1 = 0$ και έχει μία και μόνο λύση $\lambda \in \mathbb{R}$ στις επόμενες δύο περιπτώσεις:

1) $x_0 + 1 = 0$ δηλ. $x_0 = -1$ και $y_0 \neq 0$. Τα αντίστοιχα σημεία $P(x_0, y_0)$ είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $x = -1$ που είναι διαφορετικά του $(-1, 0)$.

2) $\Delta = 4y_0^2 - 4(x_0 + 1)(x_0 - 1) = 0$ δηλαδή $y_0^2 - x_0^2 + 1 = 0$ που σημαίνει $x_0^2 - y_0^2 = 1$ με την προϋπόθεση ότι $x_0 \neq -1$. Τα αντίστοιχα σημεία $P(x_0, y_0)$ είναι τα σημεία της ισοσκελούς υπερβολής με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$ τα διαφορετικά του $(-1, 0)$.

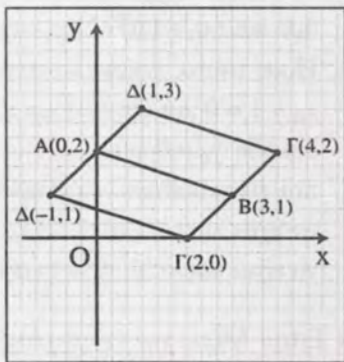


Συμπέρασμα: Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από τα σημεία της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ και της ευθείας $x = -1$ εκτός του σημείου $(-1, 0)$.

ΘΕΜΑ 66

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εμβαδού 4 τ.μ.
Αν $A(0, 2)$, $B(3, 1)$ και το σημείο τομής Κ των διαγωνίων του βρίσκεται στην ευθεία ε: $y = x$ να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ.

ΛΥΣΗ



Έστω $Γ(x_1, y_1)$ και $Δ(x_2, y_2)$. Επειδή Κ είναι το μέσο του ΑΓ θα έχουμε $K\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1+2}{2}\right)$. Όμως το Κ ανήκει στην ευθεία $ε: y = x$. Δηλαδή $\frac{y_1+2}{2} = \frac{x_1}{2}$. Οπότε $y_1 = x_1 - 2$

Επίσης $E_{ΑΒΓΔ} = 4 \Leftrightarrow 2E_{ΑΒΓ} = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1-2 & 1 \end{vmatrix} \right| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x_1 & x_1-2 \end{vmatrix} \right| = 4 \Leftrightarrow |-2(3 - x_1) + (3x_1 - 6 - x_1)| = 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |-6 + 2x_1 + 3x_1 - 6 - x_1| = 4 \Leftrightarrow |4x_1 - 12| = 4$. Δηλαδή $x_1 - 3 = 1$ ή $x_1 - 3 = -1$

Βρίσκουμε λοιπόν $x_1 = 4$ ή $x_1 = 2$. Άρα $Γ(4, 2)$ ή $Γ(2, 0)$.

- Αν $Γ(4, 2)$ τότε $\overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΒΑ}$ δηλαδή $\begin{bmatrix} x_2 - 4 \\ y_2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-3 \\ 2-1 \end{bmatrix}$

  ισοδύναμα $x_2=1$ & $y_2=3$. Οπότε $Δ(1, 3)$.

- Αν $Γ(2, 0)$ τότε $\overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΒΑ}$ δηλαδή $\begin{bmatrix} x_2 - 2 \\ y_2 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-3 \\ 2-1 \end{bmatrix}$

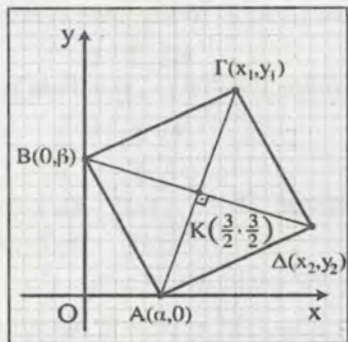
  ισοδύναμα $x_2=1$ & $y_2=3$. Οπότε $Δ(-1, 1)$.

ΘΕΜΑ 67

Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο έτσι ώστε οι κορυφές του Α, Β να είναι πάνω στους θετικούς ημιάξονας Οx, Oy αντίστοιχα και (ΟΑ) < (ΟΒ).

Αν το κέντρο του ΑΒΓΔ είναι το σημείο $K\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ και το εμβαδόν του ίσο με 5 να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Β, Γ, Δ.

ΛΥΣΗ



Έστω A(α, 0), B(0, β) με β > α > 0. Έχουμε

$$\overrightarrow{KA} = \begin{bmatrix} \alpha - \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{KB} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \beta - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Πρέπει $\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{KB}$. Δηλαδή $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = 0$

Ισοδύναμα $-\frac{3}{2}\left(\alpha - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\beta - \frac{3}{2}\right) = 0$

και τελικά βρίσκουμε ότι $\alpha + \beta = 3$.

Επίσης το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι ίσο με 5. Δηλαδή $(AB)^2 = 5$.

Βρίσκουμε λοιπόν ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 5$. Οπότε

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 - \alpha \\ \alpha^2 + (3-\alpha)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 - \alpha \\ 2\alpha^2 - 6\alpha + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 - \alpha \\ \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = 2 \end{cases}$$

Ισοδύναμα $\begin{cases} (\alpha, \beta) = (1, 2) \\ \text{ή} \\ (\alpha, \beta) = (2, 1) \end{cases}$.

Όμως $\alpha < \beta$ επομένως $(\alpha, \beta) = (1, 2)$. Άρα A(1, 0) και B(0, 2).

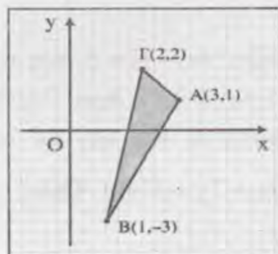
Έστω επίσης $\Gamma(x_1, y_1)$ και $\Delta(x_2, y_2)$. Επειδή το σημείο Κ είναι το κοινό μέσο των ΑΓ και ΒΔ έχουμε $\frac{1 + x_1}{2} = \frac{3}{2}$, $\frac{0 + y_1}{2} = \frac{3}{2}$, $\frac{0 + x_2}{2} = \frac{3}{2}$ και $\frac{2 + y_2}{2} = \frac{3}{2}$.

Οπότε βρίσκουμε $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 3$ και $y_2 = 1$. Δηλαδή Γ(2, 3) και Δ(3, 1).

ΘΕΜΑ 68

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εμβαδού $E \neq 1$.
Αν $A(E, 1)$, $B(1, -E)$, το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ είναι σημείο του άξονα x'x και η κορυφή Γ ανήκει στην ευθεία ε: $y = x$, να βρείτε το Ε και τις συντεταγμένες των Α, Β, Γ.

ΛΥΣΗ



Έστω $\Gamma(x_1, y_1)$. Οπότε το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ είναι το σημείο

$$G\left(\frac{x_1 + E + 1}{3}, \frac{y_1 + 1 - E}{3}\right)$$

Όμως το G βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Δηλαδή $\frac{y_1 + 1 - E}{3} = 0$ οπότε $y_1 = E - 1$ (1)

Επίσης το Γ ανήκει στην ευθεία ε: $y = x$. Δηλαδή $y_1 = x_1$. Οπότε $x_1 = E - 1$ (2)

Εχουμε $E = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} E & 1 & 1 \\ 1 & -E & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}\right|$ και λόγω των (1),(2) παίρνουμε $E = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} E & 1 & 1 \\ 1 & -E & 1 \\ E-1 & E-1 & 1 \end{vmatrix}\right|$

Δηλαδή $2E = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} E & 1 & 1 \\ 1-E & -E-1 & 0 \\ -1 & E-2 & 0 \end{matrix}\right\| \Leftrightarrow 2E = \left\|\begin{matrix} 1-E & -E-1 \\ -1 & E-2 \end{matrix}\right\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2E = |(1-E)(E-2) - E - 1| \Leftrightarrow 2E = |E - 2 - E^2 + 2E - E - 1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2E = |-E^2 + 2E - 3|$. Ισοδύναμα $2E = -E^2 + 2E - 3$ ή $2E = E^2 - 2E + 3$.

Βρίσκουμε λοιπόν $E^2 + 3 = 0$ που είναι αδύνατη ή $E^2 - 4E + 3 = 0$. Οπότε συμπεραίνουμε ότι $E = 3$ (διότι $E \neq 1$). Ώστε $A(3, 1)$, $B(1, -3)$ και $\Gamma(2, 2)$.

ΘΕΜΑ 69

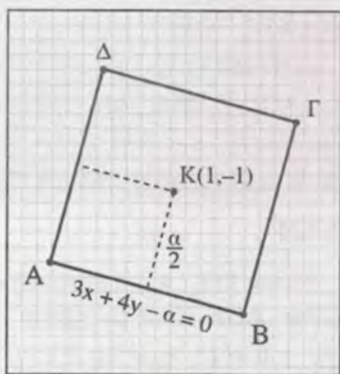
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο $K(1, -1)$ και πλευρά α. Αν ΑΒ: $3x + 4y - 2\alpha = 0$, να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχήν βρίσκουμε την πλευρά α.

Εχουμε $d(K, AB) = \frac{\alpha}{2}$. Δηλαδή $\frac{|3\cdot 1 + 4(-1) - 2\alpha|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\alpha}{2}$.

Ισοδύναμα $2|2\alpha + 1| = 5\alpha$. Παίρνουμε λοιπόν $4\alpha + 2 = 5\alpha$ ή $4\alpha + 2 = -5\alpha$



Οπότε βρίσκουμε $\alpha = 2$ ή $\alpha = -\frac{2}{9} < 0$ οπότε απορρίπτεται. Άρα $\alpha = 2$ και ΑΒ: $3x+4y-4=0$

Είναι ΓΔ//ΑΒ, δηλαδή υπάρχει $\varkappa \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ τέτοιος ώστε ΓΔ: $3x + 4y + \varkappa = 0$.

Όμως $d(K, \Gamma\Delta) = \frac{\alpha}{2}$. Δηλαδή $\frac{|3 - 4 + \varkappa|}{\sqrt{3^3 + 4^2}} = 1$

οπότε $|\varkappa - 1| = 5$ και τελικά βρίσκουμε $\varkappa = 6$ (αφού $\varkappa \neq 4$). Άρα ΓΔ: $3x + 4y + 6 = 0$.

Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ ως κάθετες στην ΑΒ θα έχουν εξισώσεις της μορφής

$-4x + 3y + \lambda = 0$. Όμως $d(K, A\Delta) = d(K, B\Gamma) = \frac{\alpha}{2}$.

Δηλαδή $\frac{|-4\cdot 1+3(-1)+\lambda|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$. Ισοδύναμα $|\lambda-7|=5$. Οπότε παίρνουμε

$\lambda-7=5$ ή $\lambda-7=-5$ και βρίσκουμε τελικά $\lambda=12$ ή $\lambda=2$. Επομένως οι εξισώσεις των ΑΔ, ΒΓ είναι $-4x+3y+12=0$ και $-4x+3y+2=0$ αντίστοιχα ή αντίστροφα.

ΘΕΜΑ 70

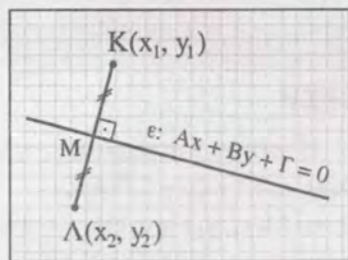
i) Αν $K(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_2, y_2)$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς την ευθεία ε: $Ax+By+\Gamma=0$ να δείξετε ότι

$(Ax_1+By_1+\Gamma)+(Ax_2+By_2+\Gamma)=0$ και $Ay_1-Bx_1=Ay_2-Bx_2$

ii) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0, 3). Αν η μεσοκάθετος (ε) της ΑΒ και η εσωτερική διχοτόμος ΓΔ έχουν εξισώσεις $x+y+1=0$ και $x+2y-1=0$ αντίστοιχα να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

ΛΥΣΗ

i) Τα σημεία Κ, Λ είναι συμμετρικά ως προς την (ε) αν και μόνο αν το μέσο Μ του ΚΛ ανήκει στην (ε) και ΚΛ ⊥ (ε).



Όμως $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Οπότε πρέπει

$A\frac{x_1+x_2}{2}+B\frac{y_1+y_2}{2}+\Gamma=0$. Δηλαδή

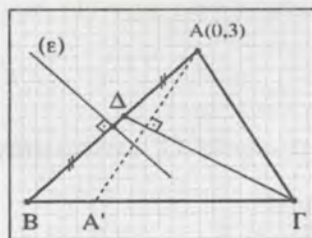
$A(x_1+x_2)+B(y_1+y_2)+2\Gamma=0 \Leftrightarrow (Ax_1+By_1+\Gamma)+(Ax_2+By_2+\Gamma)=0$

Επίσης $\overrightarrow{K\Lambda}=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{bmatrix}$ και το διάνυσμα $\vec{\delta}=\begin{bmatrix}B\\ -A\end{bmatrix}$ είναι παράλληλο στην (ε).

Οπότε ΚΛ ⊥ ε. Δηλαδή $\overrightarrow{K\Lambda}\cdot\vec{\delta}=0 \Leftrightarrow B(x_2-x_1)-A(y_2-y_1)=0$ και τελικά $Ay_1-Bx_1=Ay_2-Bx_2$.

ii) Κατ' αρχήν το σημείο $B(x_1, y_1)$ είναι το συμμετρικό του Α(0,3) ως προς την ευθεία ε: $x+y+1=0$.

Οπότε σύμφωνα με το ερώτημα (i) έχουμε:



$$\begin{cases}(x_1+y_1+1)+(0+3+1)=0\\ y_1-x_1=3-0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+y_1=-5\\ y_1-x_1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-4\\ y_1=-1\end{cases}$$. Άρα $B(-4,-1)$.

Έστω $A'(x_2, y_2)$ το συμμετρικό του $A(0, 3)$ ως προς τη διχοτόμο $ΓΔ$: $x + 2y - 1 = 0$. Σύμφωνα με το ερώτημα (i) έχουμε

$$\begin{cases}(x_2+2y_2-1)+(0+2\cdot 3-1)=0\\ y_2-2x_2=3-2\cdot 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+2y_2=-4\\ y_2-2x_2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-2\\ y_2=-1\end{cases}$$. Άρα $A'(-2,-1)$.

Όμως το σημείο A' ανήκει στην $ΒΓ$ οπότε συμπεραίνουμε ότι $ΒΓ$: $y = -1$

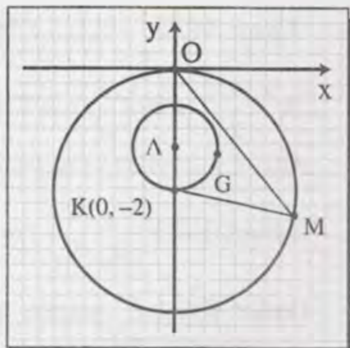
Βρίσκουμε τώρα τις συντεταγμένες του Γ:

$$\begin{cases}y=-1\\ x+2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x=3\end{cases}$$. Άρα $Γ(3,-1)$.

ΘΕΜΑ 71

Έστω ο κύκλος c που έχει κέντρο το σημείο K(0, –2) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αν το σημείο M κινείται στον παραπάνω κύκλο, να δείξετε ότι το κέντρο βάρους G του τριγώνου OKM κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΛΥΣΗ



Η ακτίνα του κύκλου c είναι $ϱ = (OK) = 2$.

Άρα c: $x^2 + (y + 2)^2 = 4$.

Έστω $M(x_1, y_1)$ και $G(x, y)$. Το σημείο M ανήκει στον κύκλο c. Δηλαδή $x_1^2 + (y_1 + 2)^2 = 4$ (1)

Επίσης το σημείο G είναι κέντρο βάρους του τριγώνου OKM. Δηλαδή

$$x=\frac{x_1+0+0}{3} \quad \text{και} \quad y=\frac{y_1+0-2}{3}$$

Οπότε βρίσκουμε $x_1 = 3x$ και $y_1 = 3y + 2$.

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $(3x)^2 + (3y + 4)^2 = 4$. Δηλαδή

$$x^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Ώστε το σημείο G κινείται στον κύκλο με κέντρο το σημείο $Λ\left(0,-\frac{4}{3}\right)$ και ακτίνα $R=\frac{2}{3}$.

ΘΕΜΑ 72

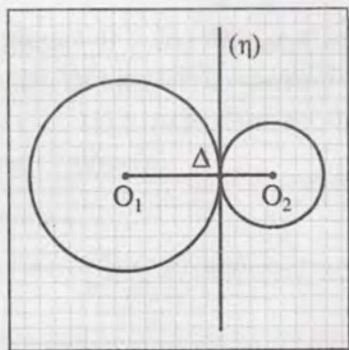
Οι κύκλοι (c_1), (c_2) με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad \text{και}$$
$$x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$$

εφάπτονται στο σημείο $\Delta(x_0, y_0)$. Να δείξετε ότι η κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων στο Δ έχει εξίσωση

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 \text{ e } B_2)y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

ΛΥΣΗ



Θα έχουμε $x_0^2 + y_0^2 + A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 = 0$
και $x_0^2 + y_0^2 + A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2 = 0$
οπότε και $(A_1 - A_2)x_0 + (B_1 - B_2)y_0 + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$
Συμπεραίνουμε ότι η ευθεία (η) με εξίσωση $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$ διέρχεται από το Δ. Παρατηρούμε επίσης ότα τα κέντρα των δύο κύκλων είναι αντίστοιχα

$$O_1\left(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2}\right),\ O_2\left(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2}\right)$$

και έχουμε $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)\vec{i} + \frac{1}{2}(B_1 - B_2)\vec{j}$.

Η ευθεία (η) είναι λοιπόν κάθετη προς τη διάκεντρο O_1O_2, άρα λοιπόν συμπίπτει με την κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων στο Δ.

◆ **Παρατήρηση** Είναι $|A_1 - A_2| + |B_1 - B_2| \neq 0$. Στην αντίθετη περίπτωση είναι $A_1 = A_2$ και $B_1 = B_2$. Οι δύο κύκλοι τότε είτε ταυτίζονται (όταν $\Gamma_1 = \Gamma_2$) είτε δεν έχουν κοινό σημείο (όταν $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$).

● Στην περίπτωση που οι κύκλοι τέμνονται, η εξίσωση

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

είναι η εξίσωση της κοινής χορδής των δύο κύκλων.

ΘΕΜΑ 73

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου στον οποίο εφάπτονται όλες οι ευθείες

$$\varepsilon_\alpha: (\eta\mu\alpha)x + (\sigma\upsilon\nu\alpha)y = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο και ϱ η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου (c). Οι ε_α εφάπτονται του (c) αν και μόνο αν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει

$d(K, \varepsilon_\alpha) = \varrho$ δηλαδή $\dfrac{|(\eta\mu\alpha)x_0 + (\sigma\upsilon\nu\alpha)y_0 - 1|}{\sqrt{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \varrho$ οπότε παίρνουμε

$|(\eta\mu\alpha)x_0 + (\sigma\upsilon\nu\alpha)y_0 - 1| = \varrho$.

Για $\alpha = 0, \pi$ παίρνουμε αντίστοιχα $|y_0 - 1| = \varrho$ και $|-y_0 - 1| = \varrho$.

Άρα $|y_0 - 1| = |-y_0 - 1|$ δηλαδή $y_0 = 0$.

Για $\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ παίρνουμε αντίστοιχα $|x_0 - 1| = \varrho$ και $|-x_0 - 1| = \varrho$.

Άρα $|-x_0 - 1| = |x_0 - 1|$ δηλαδή $x_0 = 0$. Οπότε $\varrho = |0 - 1| = 1$.

Αντίστροφα εξετάζουμε αν όλες οι ευθείες (ε_α) εφάπτονται στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ατκίνα $\varrho = 1$.

Εχουμε $d(0, \varepsilon_\alpha) = \dfrac{|(\eta\mu\alpha)0 + (\sigma\upsilon\nu\alpha)0 - 1|}{\sqrt{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = 1$

Άρα ο ζητούμενος κύκλος είναι ο c: $x^2 + y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ 74

Θεωρούμε την παραβολή (c) με εξίσωση $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ και την εφαπτομένη (ε) της (c) στο σημείο $M(x_0, y_0)$ αυτής (με $x_0 > 0$).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες α, β επί την αρχή της ευθείας (ε) και να δείξετε ότι το σημείο N(α, β) κινείται σε μια άλλη παραβολή (c_1)

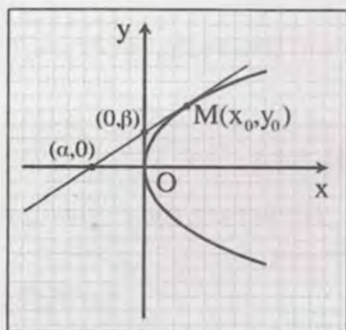
β) Να παραστήσετε τις παραβολές (c) και (c_1) στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) Η εφαπτομένη (ε) στο σημείο $M(x_0, y_0)$ της (c) έχει εξίσωση $yy_0 = p(x + x_0)$ (ε) και τέμνει τους άξονες x΄x, y΄y στα σημεία

$(-x_0, 0)$ και $\left(0, \dfrac{px_0}{y_0}\right)$, $(y_0 \neq 0)$

Είναι λοιπόν $\alpha = -x_0$ και $\beta = \dfrac{px_0}{y_0}$.

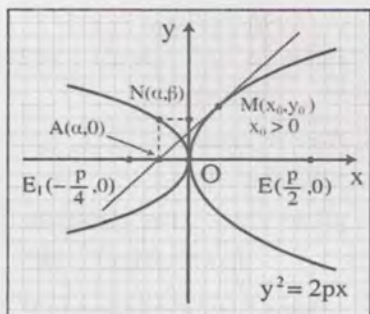


Θα είναι $\beta^2 = \frac{p^2 x_0^2}{y_0^2} = \frac{p^2 x_0^2}{2px_0} = \frac{1}{2} p x_0$ οπότε $\beta^2 = -\frac{1}{2}\alpha$.

Συμπεραίνουμε ότι το σημείο N(α, β) είναι σημείο της παραβολής (c_1) με εξίσωση $y^2 = -\frac{1}{2}px$ και διαφορετικό της κορυφής O(0, 0) αυτής.

β) Η παραβολή (c_1) έχει εστία $E_1\left(-\frac{p}{4}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία

δ_1: $x = \frac{p}{4}$.



ΘΕΜΑ 75

Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 4x$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που εφάπτονται της c στα σημεία της O(0, 0), K(1, 2) και $M(\kappa^2, 2\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

ii) Να δείξετε ότι:

α) Οι παραπάνω ευθείες ορίζουν τρίγωνο του οποίου να βρείτε την εξίσωση του περιγεγγραμμένου του κύκλου.

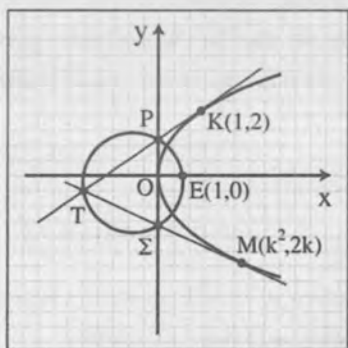
β) Καθώς το M κινείται στην παραβολή c όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

ΛΥΣΗ

i) Οι ευθείες που εφάπτονται της παραβολής c στα σημεία της O, K και M είναι αντίστοιχα: $y'y$: $x = 0$, ε: $y \cdot 2 = 2(x+1) \Leftrightarrow y = x + 1$ και ε_κ: $y \cdot 2\kappa = 2(x + \kappa^2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\kappa}x + \kappa$

ii) α) Βρίσκουμε τα σημεία τομής των παραπάνω ευθειών

$\begin{cases} x = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ Δηλαδή το σημείο τομής των $y'y$ και ε είναι το P(0, 1).



$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{\varkappa}x+\varkappa \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=\varkappa \end{cases}$ Δηλαδή το σημείο τομής των $y'y$ και $\varepsilon_\varkappa$ είναι το $\Sigma(0,\varkappa)$

$\begin{cases} y=x+1 \\ y=\frac{1}{\varkappa}x+\varkappa \end{cases}$ $\begin{cases} x=\varkappa \\ y=\varkappa+1 \end{cases}$ Δηλαδή το σημείο τομής των ε και $\varepsilon_\varkappa$ είναι το $T(\varkappa,\varkappa+$

Είναι $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \varkappa & 1 \\ \varkappa & \varkappa+1 & 1 \end{vmatrix} = \varkappa(1-\varkappa) \neq 0$, διότι $\varkappa \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

Άρα τα σημεία Ρ, Σ, Τ δεν είναι συνευθειακά συνεπώς αποτελούν κορυφές τριγώνου. Έστω $c_\varkappa$: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΡΣΤ. Τα σημεία Ρ, Σ, Τ ανήκουν στον $(C_\varkappa)$.

δηλαδή $\begin{cases} 0+1+0+B+\Gamma=0 \\ 0+\varkappa^2+0+B\varkappa+\Gamma=0 \\ \varkappa^2+(\varkappa+1)^2+A\varkappa+B(\varkappa+1)+\Gamma=0 \end{cases}$ οπότε βρίσκουμε $\begin{cases} \Gamma=\varkappa \\ B=-\varkappa-1 \\ A=-\varkappa-1 \end{cases}$

Ώστε $c_\varkappa$: $x^2+y^2-(\varkappa+1)x-(\varkappa+1)y+\varkappa=0$.

β) Έστω ότι οι κύκλοι $c_\varkappa$ διέρχονται από το σημείο με συντεταγμένες (x_0, y_0).
Δηλαδή $x_0^2+y_0^2-(\varkappa+1)x_0-(\varkappa+1)y_0+\varkappa=0$.
Ισοδύναμα $(1-x_0-y_0)\varkappa+(x_0^2+y_0^2-x_0-y_0)=0$, για κάθε $\varkappa \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.
Αυτό όμως συμβαίνει τότε και μόνο, όταν

$\begin{cases} 1-x_0-y_0=0 \\ x_0^2+y_0^2-x_0-y_0=0 \end{cases}$ δηλαδή $\begin{cases} y_0=1-x_0 \\ x_0^2+(1-x_0)^2-x_0-1+x_0=0 \end{cases}$ ισοδύναμα $\begin{cases} y_0=1-x_0 \\ 2x_0^2-2x_0=0 \end{cases}$

Οπότε βρίσκουμε $(x_0, y_0)=(0,1)$ ή $(x_0, y_0)=(1,0)$
Ώστε όλοι οι κύκλοι c_λ διέρχονται από τα σημεία Ρ(0, 1) και Ε(1, 0).

Σχόλιο: Αποδεικνύεται γενικότερα ότι οι εφαπτόμενες μιας παραβολής σε τρία τυχαία σημεία της ορίζουν τρίγωνο του οποίου ο περιγγεγραμμένος κύκλος διέρχεται από την εστία της παραβολής.

ΘΕΜΑ 76

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2-\frac{\alpha^2}{p}x-2\alpha y+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{p^2}{4}=0$ **(1)**

όπου p σταθερός θετικός αριθμός και α διατρέχει το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. ▶

▶

α) Να δείξετε ότι η (1) είναι εξίσωση οικογένειας κύκλων ($c_α$) και να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων αυτών.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική κοινή εφαπτομένη των κύκλων $c_α$ και να βρείτε ποια είναι η εφαπτομένη αυτή.

ΛΥΣΗ

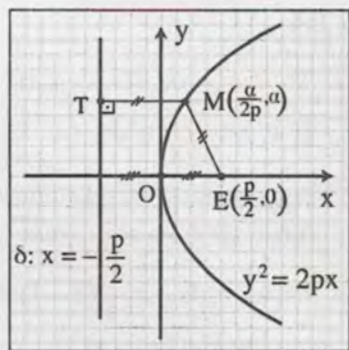
α) Η (1) γράφεται

$$\left(x-\frac{α^2}{2p}\right)^2+(y-α)^2=\frac{α^4}{4p^2}+\frac{α^2}{2}+\frac{p^2}{4} \text{ δηλαδή}$$

$$\left(x-\frac{α^2}{2p}\right)^2+(y-α)^2=\frac{(α^2+p^2)^2}{4p^2} \text{ και είναι}$$

εξίσωση κύκλου με κέντρο

$K\left(\frac{α^2}{2p},α\right)$ και ακτίνα $R=\frac{α^2+p^2}{2p}$



Οι συντεταγμένες του κέντρου Κ, δηλαδή οι $x_0=\frac{α^2}{2p}$ και $y_0=α$ επαληθεύουν $\forall α \in \mathbb{R}$ την εξίσωση $y^2=2px$ παραβολής με εστία το σημείο $\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $x=-\frac{p}{2}$. Αντίστροφα κάθε σημείο $K(x_0, y_0)$ της παραβολής συμπίπτει με το κέντρο ενός εκ των κύκλων ($c_α$), αφού με $y_0=α$ μπορούμε να γράψουμε $x_0=\frac{α^2}{2p}$, $y_0=α$. Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι λοιπόν η παραβολή (c) με εξίσωση $y^2=2px$.

β) Αν $M\left(\frac{α^2}{2p},α\right)$ σημείο της παραβολής $y^2=2px$ τότε ο αντίστοιχος κύκλος

$\left(x-\frac{α^2}{2p}\right)^2+(y-α)^2=\left(\frac{α^2+p^2}{2p}\right)^2$ εφάπτεται της διευθετούσας (δ) με εξίσωση

$x=-\frac{p}{2}$ διότι $d(K,δ)=\left|\frac{α^2}{2p}+\frac{p}{2}\right|=\frac{α^2+p^2}{2p}=R$.

Η ευθεία (δ) είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των κύκλων ($c_α$) αφού τα κέντρα αυτών δεν είναι συνευθειακά σημεία.

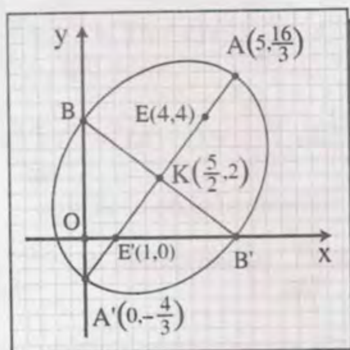
ΘΕΜΑ 77

Μία έλλειψη έχει εστίες τα σημεία Ε'(1, 0) και Ε(4, 4). Αν μια κορυφή της βρίσκεται στον άξονα y'y να βρείτε

i) Το κέντρο, τις κορυφές και την εκκεντρότητα της έλλειψης

ii) Το μήκος του μικρού άξονα Β'Β.

ΛΥΣΗ



i) Το κέντρο της έλλειψης είναι το μέσο του Ε΄Ε δηλαδή το σημείο $K\left(\frac{5}{2}, 2\right)$.

Η κορυφή Α΄ είναι το σημείο τομής της ευθείας Ε΄Ε με τον άξονα y΄y.

Είναι Ε΄Ε: $y = \frac{4}{3}(x-1)$. Οπότε για $x = 0$ παίρνουμε $y = -\frac{4}{3}$. Άρα $A'\left(0, -\frac{4}{3}\right)$

Έστω $A(x_1, y_1)$. Επειδή το Κ είναι το μέσο του Α΄Α έχουμε:

$\frac{x_1+0}{2} = \frac{5}{2}$ δηλαδή $x_1 = 5$ και $\frac{y_1 - \frac{4}{3}}{2} = 2$ δηλαδή $y_1 = \frac{16}{3}$.

Άρα $A\left(5, \frac{16}{3}\right)$.

ii) Είναι $\alpha = (A'K) = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2}$

$\gamma = (E'K) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2}$

Οπότε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \frac{25}{4} + \frac{100}{9} - \frac{9}{4} - 4 = \frac{100}{9}$. Δηλαδή $\beta = \frac{10}{3}$.

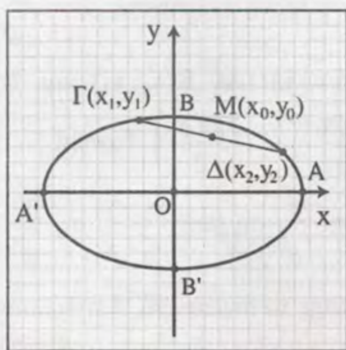
Άρα $(B'B) = 2\beta = \frac{20}{3}$.

ΘΕΜΑ 78

Έστω $\Gamma(x_1, y_1)$ και $\Delta(x_2, y_2)$ σημεία της έλλειψης $c: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Αν $M(x_0, y_0)$ είναι το μέσο του ΓΔ να δείξετε ότι η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση $\frac{xx_0}{\alpha^2}+\frac{yy_0}{\beta^2}=\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{y_0^2}{\beta^2}$.

ΛΥΣΗ



Προφανώς το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: \frac{xx_0}{\alpha^2}+\frac{yy_0}{\beta^2}=\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{y_0^2}{\beta^2}$.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι ΓΔ // ε.
Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{bmatrix} \text{ και } \vec{\delta}=\begin{bmatrix}-\frac{y_0}{\beta^2}\\ \frac{x_0}{\alpha^2}\end{bmatrix}$$

είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Δηλαδή ότι $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ -\frac{y_0}{\beta^2} & \frac{x_0}{\alpha^2}\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{\alpha^2}(x_2-x_1)+\frac{y_0}{\beta^2}(y_2-y_1)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{x_2+x_1}{2}}{\alpha^2}(x_2-x_1)+\frac{\frac{y_2+y_1}{2}}{\beta^2}(y_2-y_1)=0 \Leftrightarrow \frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{\alpha^2}+\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{\beta^2}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{x_2^2-x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{\beta^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2}=\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}$, που ισχύει διότι τα σημεία $\Gamma(x_1, y_1)$ και $\Delta(x_2, y_2)$ ανήκουν στην έλλειψη c οπότε

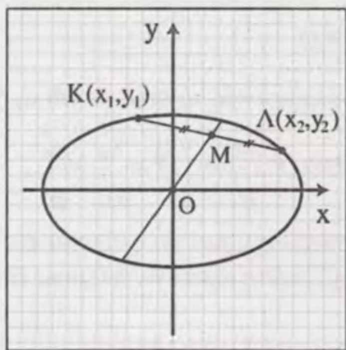
$\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2}=1$.

ΘΕΜΑ 79

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών της έλλειψης $c: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta$ που έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

Έστω ΚΛ τυχαία χορδή της έλλειψης c με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ και Μ το μέσον αυτής. Αν $K(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_2, y_2)$ τότε $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Έχουμε



$\lambda=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ δηλαδή $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ (1)

Επίσης τα σημεία Κ, Λ ανήκουν στην έλλειψη c.

Δηλαδή $\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2}=1$.

Άρα $\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{x_2^2}{\alpha^2}=\frac{y_2^2}{\beta^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{\alpha^2}=\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{\beta^2} \Leftrightarrow -\frac{\beta^2}{\alpha^2}(x_2+x_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(y_2+y_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2+x_1=y_2+y_1 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

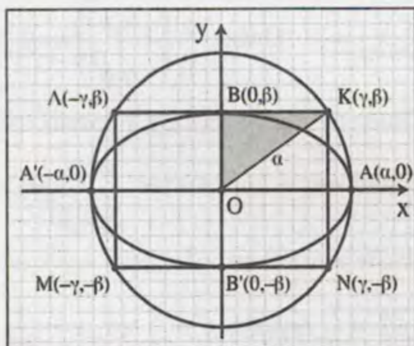
Ώστε το σημείο $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: y=x$.

ΘΕΜΑ 80

Θεωρούμε μία έλλειψη και τον κύκλο με διάμετρο τον μεγάλο άξονα της έλλειψης. Αν οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μικρού της άξονα τέμνουν τον κύκλο σε 4 σημεία που είναι κορυφές τετραγώνου να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

ΛΥΣΗ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε την έλλειψη $c_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta$. Οπότε ο κύκλος με διάμετρο τον μεγάλο άξονα αυτής είναι ο $c_2: x^2+y^2=\alpha^2$. Οι εφαπτομένες της έλλειψης c_1 στα σημεία $B(0,\beta)$ και $B'(0,-\beta)$ έχουν εξισώσεις $y=\beta$ και $y=-\beta$ αντίστοιχα. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των παραπάνω ευθειών με τον κύκλο c_2.



$$\begin{cases} y=\pm\beta \\ x^2+y^2=\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\beta \\ x^2+\beta^2=\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\beta \\ x^2=\alpha^2-\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\beta \\ x^2=\gamma^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\beta \\ x=\pm\gamma \end{cases}$$

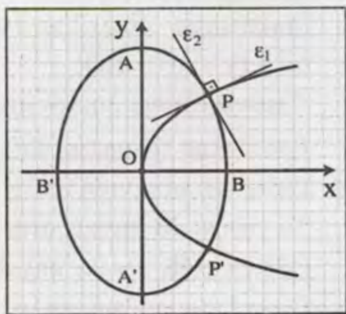
Τα σημεία λοιπόν είναι $K(\gamma,\beta)$, $\Lambda(-\gamma,\beta)$, $M(-\gamma,-\beta)$ και $N(\gamma,-\beta)$.
Το ορθογώνιο ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $\gamma=\beta$ δηλαδή $\gamma^2=\beta^2$. Όμως $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ οπότε παίρνουμε $\gamma^2=\alpha^2-\gamma^2$. Ισοδύναμα $2\gamma^2=\alpha^2$ δηλαδή $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2=\frac{1}{2}$ και τελικά $\varepsilon^2=\frac{1}{2}$. Άρα $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΘΕΜΑ 81

Να αποδείξετε ότι η παραβολή $c_1: y^2=2px$ και η έλλειψη $c_2: \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\ \alpha>\beta$. τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $P(x_1,y_1)$ κοινό σημείο των δύο κωνικών τομών. Οι εφαπτομένες των c_1, c_2 στο P είναι αντίστοιχα $\varepsilon_1: yy_1=p(x+x_1)$ και $\varepsilon_2: \frac{xx_1}{\beta^2}+\frac{yy_1}{\alpha^2}=1$.



Επίσης $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{p}{y_1}$ και $\lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{\frac{x_1}{\beta^2}}{\frac{y_1}{\alpha^2}}=-\frac{x_1\alpha^2}{y_1\beta^2}$

Οι c_1, c_2 τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. Δηλαδή

$\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1$. Οπότε $\frac{p}{y_1}\left(-\frac{x_1\alpha^2}{y_1\beta^2}\right) = -1$ και τελικά $\frac{px_1\alpha^2}{y_1^2\beta^2} = 1$ (1)

Όμως το σημείο $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή $c_1: y^2 = 2px$ δηλαδή $y_1^2 = 2px_1$.

Επομένως η (1) γίνεται $\frac{px_1\alpha^2}{2px_1\beta^2} = 1$ ισοδύναμα $\alpha^2 = 2\beta^2$. Όμως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

οπότε παίρνουμε $\alpha^2 = 2(\alpha^2 - \gamma^2)$ και ισοδύναμα

$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}$ δηλαδή $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

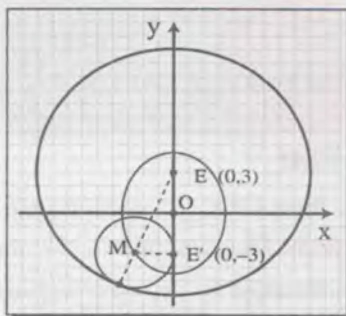
ΘΕΜΑ 82

Δίνεται η έλλειψη $c: \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ και ο κύκλος $c_1: x^2 + y^2 - 6y - 91 = 0$

i) Να βρείτε τις εστίες της c, το κέντρο και την ακτίνα του c_2 και να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση των δύο κωνικών τομών.

ii) Έστω c_λ η οικογένεια των κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου c και έχουν τα κέντρα τους στην έλλειψη c'. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι c_λ διέρχονται από σταθερό σημείο.

ΛΥΣΗ



i) Έχουμε $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 3$.
Η έλλειψη c έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και οι εστίες της E,E' βρίσκονται στον άξονα $y'y$.
Άρα $E(0, 3)$ και $E'(0, -3)$.
Επίσης $c_1: x^2 + y^2 - 6y - 91 = 0$.
Ισοδύναμα $x^2+(y^2-6y+9)=91+9$ δηλαδή $x^2 + (y-3)^2 = 100$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο κύκλος c_2 έχει έχει κέντρο το σημείο $E(0, 3)$ και ακτίνα $R = 10$.

ii) Έστω M το κέντρο και ρ η ακτίνα τυχαίου κύκλου της οικογένειας c_λ.
Το σημείο M ανήκει στην έλλειψη c αν και μόνο αν
$(ME) + (ME') = 2\alpha$ δηλαδή $(ME) + (ME') = 10$ (1)
Όμως ο παραπάνω κύκλος εφάπτεται εσωτερικά του c_1. Δηλαδή

$(ME) = R - \varrho$ ισοδύναμα $(ME) = 10 - \varrho$ (2)

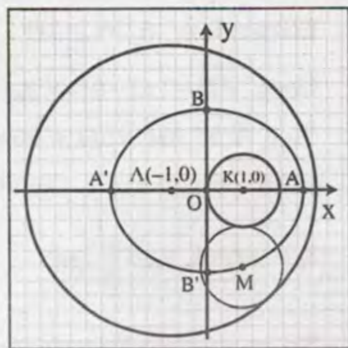
Από τις (1), (2) παίρνουμε $10 - \varrho + (ME') = 10$ δηλαδή $(ME') = \varrho$.

Ώστε κάθε κύκλος της οικογένειας c_λ διέρχεται από το σημείο $E'(0, -3)$.

ΘΕΜΑ 83

Να βρείτε την καμπύλη στην οποία ανήκουν τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου c_1: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ και εσωτερικά του κύκλου c_2: $(x+1)^2 + y^2 = 16$.

ΛΥΣΗ



Ο κύκλος c_1 έχει κέντρο το $K(1, 0)$ και ακτίνα $\varrho_1 = 1$, ενώ ο κύκλος c_2 έχει κέντρο το $\Lambda(-1, 0)$ και ακτίνα $\varrho_2 = 4$.

Έστω $M(x, y)$ το κέντρο και R η ακτίνα τυχαίου κύκλου c που εφάπτεται εξωτερικά του c_1 και εσωτερικά του c_2. Είναι λοιπόν

$(MK) = R + \varrho_1$ και $(M\Lambda) = \varrho_2 - R$.

Οπότε $(MK) + (M\Lambda) = \varrho_1 + \varrho_2$ δηλαδή

$(MK) + (M\Lambda) = 5$. Τούτο όμως σημαίνει ότι η ζητούμενη καμπύλη στην οποία ανήκει το M είναι η έλλειψη με εστίες τα σημεία $K(1, 0)$, $\Lambda(-1, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2\alpha = 5$.

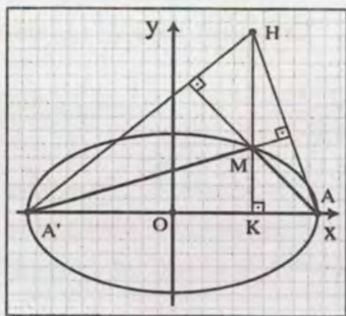
ΘΕΜΑ 84

Σημείο M διαγράφει την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ $(\alpha > \beta > 0)$ (γ).

α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του M γράφονται στη μορφή $x_1 = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta$, $y_1 = \beta\eta\mu\theta$ όπου $0 \le \theta < 2\pi$.

β) Έστω $H(x_0, y_0)$ το ορθόκεντρο του τριγώνου MAA' όπου $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$ οι αντίστοιχες κορυφές της έλλειψης.
Να δείξετε ότι το H κείται σε σταθερή έλλειψη, όταν το M κινείται στην αρχική έλλειψη (γ).

ΛΥΣΗ



α) Είναι $\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y_1}{\beta}\right)^2=1$. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $\frac{x_1}{\alpha}=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\frac{y_1}{\beta}=\eta\mu\theta$ όπου θ κατάλληλη γωνία, με $0\le\theta<2\pi$. Θα είναι τότε και $x_1=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$, $y_1=\beta\eta\mu\theta$.

β) Έστω $H(x_0, y_0)$ το ορθόκεντρο του τριγώνου MAA'. Θα είναι $x_0=x_1=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$, αφού το H είναι σημείο του ύψους MK.

Είναι επίσης $\overrightarrow{A'M}\perp\overrightarrow{AH}$.

Όμως $\overrightarrow{AH}=(x_0-\alpha)\vec{i}+y_0\vec{j}$ και $\overrightarrow{A'M}=(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\alpha)\vec{i}+\beta\eta\mu\theta\,\vec{j}$.

Άρα $\overrightarrow{A'M}\,\overrightarrow{AH}=\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\theta)(x_0-\alpha)+\beta y_0\eta\mu\theta=0$

οπότε $\beta y_0\eta\mu\theta=\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)=\alpha^2\eta\mu^2\theta$ και τελικά

$x_0=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$, $y_0=\frac{\alpha^2}{\beta}\eta\mu\theta$.

Συμπεραίνουμε ότι είναι και $\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{y_0^2}{\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^2}=1$.

Το ορθόκεντρο $H(x_0, y_0)$ είναι λοιπόν σημείο της έλλειψης (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^2}=1$ με εστίες στον άξονα $y'y$, μεγάλο ημιάξονα ίσο με $\frac{\alpha^2}{\beta}$ και μικρό ημιάξονα ίσο με α.

ΘΕΜΑ 85

Θεωρούμε την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $(\alpha>\beta>0)$ και την ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ (ε) που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την έλλειψη. $(AB\neq 0)$. ▶

▶

α) Σημείο $M(x_0, y_0)$ διαγράφει την ευθεία (ε). Να δείξετε ότι αν MP_1 και MP_2 είναι οι εφαπτόμενες της έλλειψης από το Μ, η εξίσωση $\frac{x_0x}{\alpha^2}+\frac{y_0y}{\beta^2}=1$ είναι η εξίσωση της ευθείας P_1P_2.

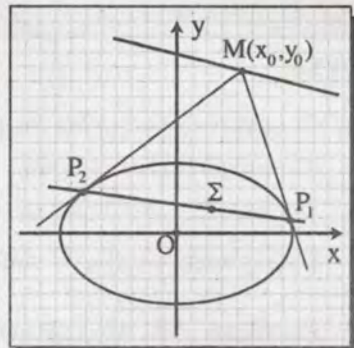
β) Να δείξετε ότι όταν το Μ διαγράφει την (ε) η ευθεία P_1P_2 διέρχεται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ είναι τα σημεία επαφής των MP_1, MP_2 με την έλλειψη. Οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα σημεία P_1, P_2 έχουν εξισώσεις

$\frac{x_1x}{\alpha^2}+\frac{y_1y}{\beta^2}=1$ και $\frac{x_2x}{\alpha^2}+\frac{y_2y}{\beta^2}=1$, αντίστοιχα

και διέρχονται από το $M(x_0, y_0)$. Θα έχουμε λοιπόν $\frac{x_0x_1}{\alpha^2}+\frac{y_0y_1}{\beta^2}=1$ και $\frac{x_0x_2}{\alpha^2}+\frac{y_0y_2}{\beta^2}=1$.



Οι τελευταίες σχέσεις εκφράζουν ότι η ευθεία $\frac{x_0x}{\alpha^2}+\frac{y_0y}{\beta^2}=1$ διέρχεται από τα P_1, P_2, είναι λοιπόν η ευθεία P_1P_2.

β) Έχουμε $Ax_0+By_0+\Gamma=0$, οπότε $By_0=-\Gamma-Ax_0$. Η εξίσωση

$\frac{x_0x}{\alpha^2}+\frac{y_0y}{\beta^2}=1$ γίνεται $\frac{x_0x}{\alpha^2}-\frac{1}{B}\,\frac{Ax_0+\Gamma}{\beta^2}\,y=1$ δηλαδή

$\left(\frac{x}{\alpha^2}-\frac{A}{B\beta^2}y\right)x_0-\left(\frac{\Gamma}{B\beta^2}y+1\right)=0$. Διέρχεται λοιπόν από σταθερό σημείο $\Sigma(x, y)$

(ανεξάρτητο του x_0) τότε και μόνο, όταν είναι $\frac{x}{\alpha^2}-\frac{Ay}{B\beta^2}=0$ και $\frac{\Gamma y}{B\beta^2}+1=0$

Βρίσκουμε $y=-\frac{B\beta^2}{\Gamma}$ ($\Gamma\neq 0$ αφού η (ε) δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων) και

$x=-\alpha^2\,\frac{A}{B\beta^2}\,\frac{B\beta^2}{\Gamma}=-\frac{\alpha^2A}{\Gamma}$. Το σταθερό σημείο είναι λοιπόν το $\Sigma\left(-\frac{\alpha^2A}{\Gamma},-\frac{\beta^2B}{\Gamma}\right)$.

ΘΕΜΑ 86

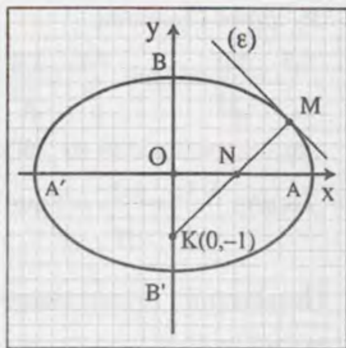
Θεωρούμε την έλλειψη (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ και το σημείο Κ(0, −1).

α) Να βρείτε για ποιο σημείο $M(x_0, y_0)$ της έλλειψης με $x_0, y_0 \geq 0$ γίνεται μέγιστο το $|\overrightarrow{KM}|$.

β) Έστω Ν το σημείο τομής της ευθείας ΚΜ με τον άξονα x'x. Να δείξετε ότι από τα σημεία της έλλειψης που βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο, το Μ είναι το πλησιέστερο σημείο προς το Ν.

γ) Να δείξετε ότι (ε)⊥ΚΜ, όπου (ε) η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ.

ΛΥΣΗ



α) Οι συντεταγμένες κάθε σημείου της έλλειψης (c) γράφονται στη μορφή

$x=2\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\sqrt{2}\eta\mu\theta$ με $0\leq\theta<2\pi$.

Για τις τιμές $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ παίρνουμε τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Για κάθε τέτοιο σημείο Μ, έχουμε

$|\overrightarrow{KM}|^2=|2\sigma\upsilon\nu\theta\,\vec{i}+(\sqrt{2}\eta\mu\theta-1)\vec{j}|^2=$

$=4\sigma\upsilon\nu^2\theta+(\sqrt{2}\eta\mu\theta-1)^2=4-4\eta\mu^2\theta+2\eta\mu^2\theta+1+2\sqrt{2}\eta\mu\theta$

και τελικά $|\overrightarrow{KM}|^2=-2\eta\mu^2\theta+2\sqrt{2}\eta\mu\theta+5=6-(\sqrt{2}\eta\mu\theta-1)^2$.

Θα είναι λοιπόν $|\overrightarrow{KM}|=\min.$, τότε και μόνο, όταν είναι $|\overrightarrow{KM}|^2=\min$ δηλαδή τότε και μόνο, όταν είναι $\sqrt{2}\eta\mu\theta-1=0$, γεγονός που αντιστοιχεί στη γωνία $\theta=\frac{\pi}{4}$. Το σημείο Μ λοιπόν του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ για το οποίο γίνεται μέγιστο το μέτρο $|\overrightarrow{KM}|$ έχει συντεταγμένες

$x_0=2\,\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},\ y_0=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$

β) Η ευθεία ΚΜ έχει εξίσωση $\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{y+1}{2}$ δηλαδή $\sqrt{2}\,x=y+1$.

Για $y=0$ παίρνουμε $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Οι συντεταγμένες του N είναι λοιπόν

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ και για κάθε σημείο $P(2\sigma\upsilon\nu\theta, \sqrt{2}\eta\mu\theta)$ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι

$$(MN)^2=\left(2\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\eta\mu^2\theta=4\sigma\upsilon\nu^2\theta+\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta+2\eta\mu^2\theta$$

δηλαδή $(MN)^2=2\sigma\upsilon\nu^2\theta-2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{3}{2}=(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta-1)^2+\frac{3}{2}$.

Βρίσκουμε λοιπόν ότι (MN) = minimum τότε και μόνο όταν $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta=1$, δηλαδή για $\theta=\frac{\pi}{4}$, οπότε για $P\equiv M$.

γ) Η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης (c) στο σημείο $M(\sqrt{2}, 1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x\sqrt{2}}{4}+\frac{y}{2}=1 \text{ δηλαδή } x\sqrt{2}+2y=4 \quad (\varepsilon)$$

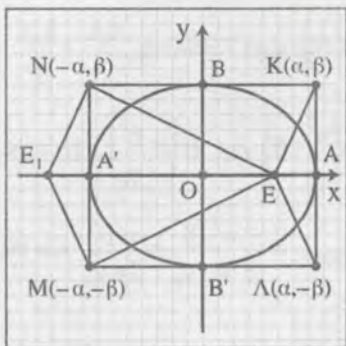
Ένα κάθετο διάνυσμα της (ε) είναι το διάνυσμα $\vec{\delta}=\sqrt{2}\vec{i}+2\vec{j}$.

Όμως, $\overrightarrow{KM}=\sqrt{2}\vec{i}+2\vec{j}=\vec{\delta}$. Άρα λοιπόν είναι $\overrightarrow{KM}\perp(\varepsilon)$.

ΘΕΜΑ 87

Θεωρούμε την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και το ορθογώνιο ΚΛΜΝ που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες στις κορυφές της έλλειψης. Να δείξετε ότι αν Ε είναι μία από τις εστίες της, τότε οι περιγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΕΚΛ, ΕΛΜ, ΕΜΝ, ΕΝΚ είναι ίσοι.

ΛΥΣΗ



Υποθέτουμε ότι είναι $\alpha>\beta$. (Η απόδειξη στην αντίθετη περίπτωση είναι εντελώς όμοια).

Έστω Ε η εστία με συντεταγμένες $(\gamma, 0)$ και Κ, Λ, Μ, Ν οι κορυφές του ορθογώνιου, με συντεταγμένες (α, β), $(\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, \beta)$ αντίστοιχα. Είναι

$\overrightarrow{EK}=(\alpha-\gamma)\vec{i}+\beta\vec{j}$ και $\overrightarrow{EN}=-(\alpha+\gamma)\vec{i}+\beta\vec{j}$, οπότε έχουμε και

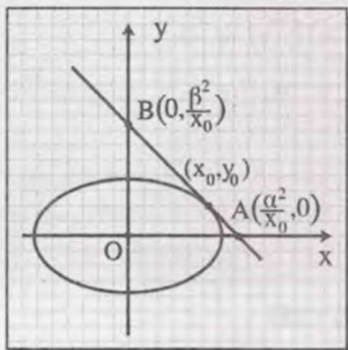
$\overrightarrow{EK}\,\overrightarrow{EN} = \gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2 = 0$ άρα $K\widehat{E}N = 90^\circ$. Όμοια $M\widehat{E}\Lambda = 90^\circ$.
Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι λοιπόν στα τρίγωνα ΚΕΝ και ΜΕΛ έχουν διαμέτρους τις ΚΝ και ΛΜ, μήκους 2α. Οι ακτίνες τους είναι λοιπόν ίσες με $R_1 = R_2 = \alpha$. Είναι επίσης, $K\hat{E}\Lambda = N\hat{E}M = 180^\circ$. Θεωρούμε σημείο E_1 του άξονα $x'x$, με $A'E_1 = AE$. Είναι τότε τριγ. $(E_1MN) =$ τριγ. $(EK\Lambda)$ και το τετράπλευρο (EME_1N) είναι εγγράψιμο σε κύκλο με διάμετρο EE_1 μήκους 2α. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι λοιπόν στα τρίγωνα ΕΚΛ και ΕΜΝ έχουν ακτίνες $R_3 = R_4 = \alpha$.

ΘΕΜΑ 88

Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που εφάπτονται της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (c) και σχηματίζουν με τους άξονες συντεταγμένων τρίγωνο ελάχιστου εμβαδού.

ΛΥΣΗ

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της (c) με την ιδιότητα που αναφέρεται βρίσκονται αρκεί να βρεθούν τα αντίστοιχα σημεία επαφής (x_0, y_0). Παρατηρούμε επίσης ότι λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζεται αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα θεωρώντας εφαπτόμενες της (c) στο πρώτο τεταρτημόριο δηλ. με $x_0, y_0 > 0$.
Έστω λοιπόν (η) εφαπτομένη της (c) στο σημείο (x_0, y_0) αυτής με $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.



Η (η) έχει εξίσωση $\frac{x_0 x}{\alpha^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1$ και τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(\frac{\alpha^2}{x_0}, 0\right)$ και $B\left(0, \frac{\beta^2}{y_0}\right)$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με

$E_{(OAB)} = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{x_0}\frac{\beta^2}{y_0} = \frac{\alpha^2\beta^2}{2x_0y_0}$ και είναι $\frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1$. Προκύπτει ότι είναι

$\left(\frac{x_0}{\alpha}-\frac{y_0}{\beta}\right)^2=\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{y_0^2}{\beta^2}-2\,\frac{x_0y_0}{\alpha\beta}$ δηλαδή $\left(\frac{x_0}{\alpha}-\frac{y_0}{\beta}\right)^2=1-2\alpha\beta\,\frac{x_0y_0}{\alpha^2\beta^2}=1-\frac{\alpha\beta}{E_{(OAB)}}$.

Θα είναι $E_{(OAB)}=\min$ τότε και μόνο, όταν είναι $\frac{\alpha\beta}{E_{(OAB)}}=\max$ δηλαδή τότε και μόνο όταν $\left(\frac{x_0}{\alpha}-\frac{y_0}{\beta}\right)^2=1-\frac{\alpha\beta}{E_{(OAB)}}=\min$. Αυτό όμως συμβαίνει όταν και μόνο όταν ισχύει $\frac{x_0}{\alpha}=\frac{y_0}{\beta}$. Στην περίπτωση αυτή είναι $\frac{x_0^2}{\alpha^2}=\frac{y_0^2}{\beta^2}=\frac{1}{2}$ άρα λοιπόν $\frac{x_0}{\alpha}=\frac{y_0}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, οπότε $x_0=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $y_0=\frac{\beta}{\sqrt{2}}$. Η αντίστοιχη εφαπτόμενη (η) έχει εξίσωση $\frac{x_0x}{\alpha^2}+\frac{y_0y}{\beta^2}=1$, δηλαδή $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{x}{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{y}{\beta}=1$ δηλαδή $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=\sqrt{2}$.

β' τρόπος ......

$$E=\frac{1}{2}\left|\frac{\alpha^2}{x_0}\right|\left|\frac{\beta^2}{y_0}\right|=\frac{\alpha\beta}{2\left|\frac{x_0}{\alpha}\right|\left|\frac{x_0}{\beta}\right|}\geq\frac{\alpha\beta}{\left|\frac{x_0}{\alpha}\right|^2+\left|\frac{y_0}{\beta}\right|^2}=\frac{\alpha\beta}{\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{y_0^2}{\beta^2}}=\frac{\alpha\beta}{1}=\alpha\beta$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\left|\frac{x_0}{\alpha}\right|=\left|\frac{y_0}{\beta}\right|\Leftrightarrow\frac{x_0}{\alpha}=\pm\frac{y_0}{\beta}$ ....

◆ **Το επόμενο πρόβλημα μας το έκανε γνωστό ο ξεχωριστός συνάδελφος Μαθηματικός Γρηγόρης Τσιτσίνιας στον οποίο οφείλεται και η απόδειξη που αναφέρουμε. Τον ευχαριστούμε.**

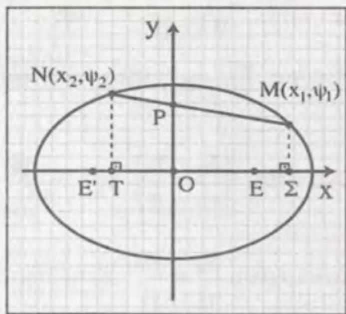
ΘΕΜΑ 89

Θεωρούμε την έλλειψη (γ) με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ $(\alpha>\beta>0)$ με εστίες τα σημεία $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$ $(\gamma>0)$. Να δείξετε ότι αν M, N σημεία της έλλειψης και P το κοινό σημείο της ευθείας MN με τον άξονα y'y θα είναι

$$\left|\frac{(ME')-(ME)}{(NE')-(NE)}\right|=\frac{(MP)}{(NP)}$$

ΛΥΣΗ

Έστω $M(x_1, y_1)$ και $N(x_2, y_2)$.



Είναι $(ME')^2 - (ME)^2 =$

$= (x_1 + \gamma)^2 + y_1^2 - (x_1 - \gamma)^2 - y_1^2 = 4\gamma x_1$ και

$(ME') + (ME) = 2\alpha$ οπότε θα έχουμε

$2\alpha[(ME') - (ME)] = 4\gamma x_1$ άρα και

$|(ME') - (ME)| = \dfrac{2\gamma}{\alpha}|x_1|$. Όμοια θα είναι

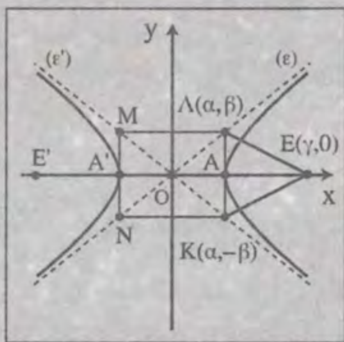
$|(NE') - (NE)| = \dfrac{2\gamma}{\alpha}|x_2|$, οπότε προκύπτει

$\left|\dfrac{(ME') - (ME)}{(NE') - (NE)}\right| = \left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{(O\Sigma)}{(OT)}$. Όμως $\dfrac{(O\Sigma)}{(OT)} = \dfrac{(MP)}{(NP)}$

και το ζητούμενο δείχθηκε.

ΘΕΜΑ 90

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η υπερβολή $c: \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστίες $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και το ορθογώνιο "βάσης" ΚΛΜΝ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΚΕΛ είναι ρόμβος αν και μόνο αν η εκκεντρότητά της (c) είναι $\varepsilon = 2$. Ποιες είναι τότε οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της c;



ΛΥΣΗ

Επειδή $OE \perp K\Lambda$ το τετράπλευρο ΟΚΕΛ είναι ρόμβος αν και μόνο αν είναι παραλληλόγραμμο, δηλαδή $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{\Lambda E}$. Δηλαδή

$\begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma-\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$ ισοδύναμα $\gamma-\alpha=\alpha$ ισοδύναμα $\frac{\gamma}{\alpha}=2$ δηλαδή $\varepsilon=2$

Επίσης $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=\sqrt{4\alpha^2-\alpha^2}=\alpha\sqrt{3}$.

Οπότε οι ασύμπτωτες της c είναι

ε: $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ δηλ. $y=\sqrt{3}\,x$

και ε: $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ δηλ. $y=-\sqrt{3}\,x$

ΘΕΜΑ 91

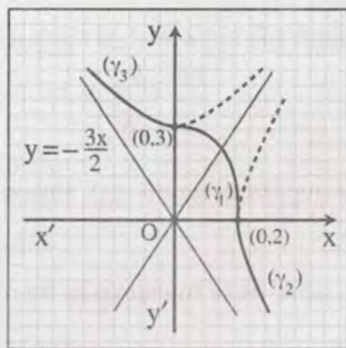
Να παρασταθεί γραφικά η εξίσωση

$$\frac{x|x|}{4}+\frac{y|y|}{9}=1 \quad (E)$$

ΛΥΣΗ

Θα αναζητήσουμε τη μορφή του διαγράμματος της (E) σε καθένα από τα τεταρτημόρια $(x \geq 0,\ y \geq 0)$, $(x \geq 0,\ y \leq 0)$, $(x \leq 0,\ y \geq 0)$ και $(x \leq 0,\ y \leq 0)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $x \geq 0,\ y \geq 0$. Η εξίσωση γίνεται $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ και παριστάνει το αντίστοιχο τμήμα της έλλειψης που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. (τμήμα (γ_1)).



β) $x \geq 0,\ y \leq 0$. Η (E) γίνεται $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ και παριστάνει το αντίστοιχο τμήμα υπερβολής, με ασύμπτωτο την ευθεία $y=-\frac{3x}{2}$ (τμήμα (γ_2)).

γ) $x \leq 0,\ y \geq 0$. Τμήμα της υπερβολής $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (τμήμα (γ_3)).

δ) $x \leq 0,\ y \leq 0$. Η (E) γίνεται $-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ δηλαδή $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=-1$ και είναι αδύνατη.

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι λοιπόν το συνένωμα των (γ_1), (γ_2), (γ_3).

ΘΕΜΑ 92

Θεωρούμε την υπερβολή (c) $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ $(\alpha,\beta>0)$, όπου τα α, β μεταβάλλονται έτσι ώστε η υπερβολή να εφάπτεται στην ευθεία

(η) $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$ $(A,B\neq 0)$.

Να δείξετε ότι τα σημεία, με συντεταγμένες (±α, ±β) είναι πάντοτε σημεία της υπερβολής $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$.

ΛΥΣΗ

● Συνθήκη επαφής της υπερβολής (c) $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και της ευθείας (η) $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$ $(\alpha,\beta>0,\ A,B\neq 0)$. Η (η) εφάπτεται της (c) τότε και μόνο όταν ταυτίζεται με την εφαπτομένη της υπερβολής σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) της καμπύλης (c).

Σε κάθε περίπτωση που η ευθεία $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$ (η) εφάπτεται της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (c) υπάρχει σησμείο $P(x_0,y_0)$ της (c) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της (c) στο $P(x_0, y_0)$ να συμπίπτει με την (η). Η εφαπτομένη στο P έχει εξίσωση

$$\frac{x_0x}{\alpha^2}-\frac{y_0y}{\beta^2}=1$$

και συμπίπτει με την (η) τότε και μόνο, όταν $\frac{x_0}{\alpha^2}=\frac{1}{A}$ και $-\frac{y_0}{\beta^2}=\frac{1}{B}$ δηλαδή τότε και μόνο όταν το σημείο με συντεταγμένες $\left(\frac{\alpha^2}{A},-\frac{\beta^2}{B}\right)$ είναι σημείο της υπερβολής (c) (και της (η) επίσης). Προς τούτο πρέπει και αρκεί να είναι

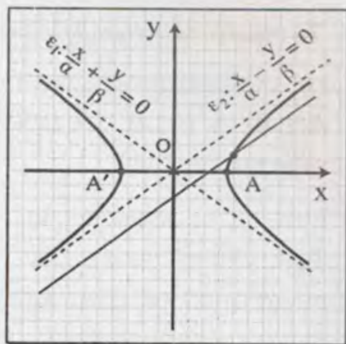
$$\frac{\alpha^4}{\alpha^2A^2}-\frac{\beta^4}{\beta^2B^2}=1 \text{ δηλαδή } \frac{\alpha^2}{A^2}-\frac{\beta^2}{B^2}=1 \quad (\Sigma)$$

Μία συνέπεια της συνθήκης (Σ) είναι ότι τα σημεία (±α, ±β) είναι σημεία της υπερβολής $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$.

ΘΕΜΑ 93

Να δείξετε ότι κάθε ευθεία (η) παράλληλη προς κάποια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (c), και διαφορετική από τις δύο ασύμπτωτες αυτές, τέμνει την υπερβολή σε ένα και μόνο σημείο.

ΛΥΣΗ



Οι δύο ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) έχουν αντίστοιχα εξισώσεις $\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=0\ (\varepsilon_1)$ και $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=0\ (\varepsilon_2)$

Έστω ότι είναι $(\eta) \parallel (\varepsilon_1)$ και $(\eta) \neq (\varepsilon_1)$.

Η εξίσωση της (η) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=\varrho, \text{ με } \varrho \neq 0$$

Παρατηρούμε επίσης ότι τα κοινά σημεία (x, y) των (c) και (η) αντιστοιχούν ακριβώς στις λύσεις (x, y) του συστήματος $\left\{\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=\varrho \text{ και } \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\right\}$.

Για τα σημεία (x, y) αυτά θα έχουμε λοιπόν

$\varrho\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)=1$, οπότε $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=\frac{1}{\varrho}$ και τελικά $\frac{2x}{\alpha}=\varrho+\frac{1}{\varrho}$ και $\frac{2y}{\beta}=\frac{1}{\varrho}-\varrho$

Παρατηρούμε λοιπόν: $x=\frac{\alpha}{2}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)$ και $y=\frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\varrho\right)$.

Οι (c) και (η) έχουν λοιπόν μοναδικό κοινό σημείο.

ΘΕΜΑ 94

α) Να δείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{1}{\text{συν}\theta}, \text{εφ}\theta\right)$, όπου $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ είναι σημείο του ενός κλάδου υπερβολής της οποίας να βρείτε τις κορυφές Α, Α' και τις ασύμπτωτες.

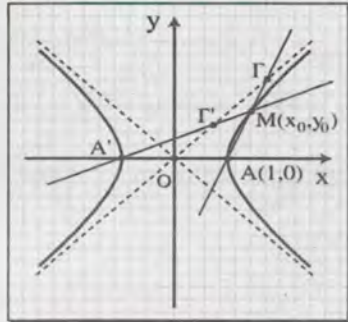
β) Έστω Γ και Γ' τα κοινά σημεία της διχοτόμου $y=x$ και των ευθειών ΜΑ και ΜΑ' αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΓΓ' έχει σταθερό μήκος (ανεξάρτητο του θ).

ΛΥΣΗ

α) Αν είναι $x_0 = \frac{1}{συνθ}$, $y_0 = εφθ$ οι συντεταγμένες της τυχαίας θέσης του Μ θα έχουμε

$x_0^2 - y_0^2 = \frac{1}{συν^2θ} - εφ^2θ = 1$. Επίσης και

$x_0 = \frac{1}{συνθ} > 0 \left(αφού\ -\frac{π}{2} < θ < \frac{π}{2}\right)$



Το σημείο Μ ανήκει λοιπόν στον δεξιό κλάδο της ισοσκελούς υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$. Η υπερβολή αυτή έχει κορυφές $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους $y = x$ και $y = -x$ των γωνιών των αξόνων.

β) Έστω (x_1, y_1) και (x_2, y_2) οι συντεταγμένες των Γ, Γ΄ αντίστοιχα. Τότε $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ και τα σημεία Α, Μ, Γ όπως και τα Α΄, Μ, Γ΄ είναι συνευθειακά. Θα είναι λοιπόν

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Βρίσκουμε τότε

$\begin{vmatrix} x_1-1 & y_1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x_0-1 & y_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} x_2+1 & y_2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ x_0+1 & y_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Άρα και $\begin{vmatrix} x_1-1 & x_1 \\ x_0-1 & y_0 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} x_2+1 & y_2 \\ x_0+1 & y_0 \end{vmatrix} = 0$

Οπότε $\begin{vmatrix} x_1-1 & 1 \\ x_0-1 & y_0+1-x_0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x_2+1 & 1 \\ x_0+1 & y_0-y_0+1 \end{vmatrix} = 0$ και

$(x_1-1)\left(1 + εφθ - \frac{1}{συνθ}\right) = \frac{1}{συνθ} - 1$, $(x_2+1)\left(1 + \frac{1}{συνθ} - εφθ\right) = \frac{1}{συνθ} + 1$.

Οπότε $x_1 - 1 = \frac{1 - συνθ}{ημθ + συνθ - 1}$, $x_2 + 1 = \frac{1 + συνθ}{1 + συνθ - ημθ}$ δηλαδή

$x_1 = \frac{ημθ}{ημθ + συνθ - 1}$, $x_2 = \frac{ημθ}{1 + συνθ - ημθ}$. Βρίσκουμε λοιπόν

$x_1 - x_2 = \frac{ημθ}{συν^2θ - (1 - ημθ)^2}(2 - 2ημθ) = \frac{2ημθ(1 - ημθ)}{2ημθ(1 - ημθ)} = 1$

Οπότε $(ΓΓ')^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 2$ και $(ΓΓ') = \sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 95

Να δείξετε ότι η παραβολή (c) $y^2 + \beta x - 2y + 9 = 0$ εφάπτεται της ευθείας $y = \alpha x$ σε σημείο με τεταγμένη $y_0 = 3$, τότε και μόνο, όταν είναι $\beta = -4\alpha$.

ΛΥΣΗ

Για να εφάπτεται η παραβολή (c) της ευθείας $y = \alpha x$ σε σημείο $M(x_0, y_0)$ με $y_0 = 3$ πρέπει καταρχήν το σημείο με συντεταγμένες $(x_0, y_0 = 3)$ να είναι κοινό σημείο της ευθείας $y = \alpha x$ και της παραβολής (c), να έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} 3 = \alpha x_0 \\ \text{και} \\ 9 + \beta x_0 - 6 + 9 = 0 \end{cases}. \text{ Οπότε } \begin{cases} \alpha x_0 = 3 \\ \text{και} \\ \beta x_0 = -12 \end{cases}$$

Τότε όμως θα έχουμε και

$$\begin{cases} \alpha\beta x_0 = 3\beta \\ \text{και} \\ \alpha\beta x_0 = -12\alpha \end{cases}, \text{ άρα λοιπόν } \begin{cases} 3\beta = -12\alpha \\ \text{και} \\ \beta = -4\alpha \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Αντίστροφα έστω $\beta = -4\alpha$ με $\alpha \neq 0$.
Η εξίσωση της παραβολής (c) γίνεται $y^2 - 4\alpha x - 2y + 9 = 0$.
Για τα κοινά σημεία (x, y) της παραβολής και της ευθείας $y = \alpha x$ θα έχουμε

$$\begin{cases} y = \alpha x \\ \text{και} \\ y^2 - 4\alpha x - 2y + 9 = 0 \end{cases}$$

οπότε $\alpha^2 x^2 - 6\alpha x + 9 = 0$ δηλαδή $(\alpha x - 3)^2 = 0$

Η τελευταία εξίσωση έχει διπλή ρίζα $x_0 = \dfrac{3}{\alpha}$ και το σύστημα μοναδική λύση

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{\alpha} \\ \text{και} \\ y_0 = \alpha x_0 = 3 \end{cases}$$

Το σημείο $\left(\dfrac{3}{\alpha}, 3\right)$ είναι διπλό κοινό σημείο της ευθείας (η) $y = \alpha x$ και της παραβολής (c). Άρα η (η) εφάπτεται της (c) στο σημείο $\left(\dfrac{3}{\alpha}, 3\right)$.

ΘΕΜΑ 96

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με $P(\omega_1) = \alpha + \frac{7}{8}$, $P(\omega_2) = \alpha^2$ και $P(\omega_3) = -\frac{5}{4}\alpha$.

Υπολογίστε το α.

ΛΥΣΗ

Πρέπει και αρκεί $0 \le P(\omega_i) \le 1$, $i = 1, 2, 3$ και $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = 1$.

Έχουμε $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = 1$ δηλαδή $\alpha + \frac{7}{8} + \alpha^2 - \frac{5}{4}\alpha = 1$.

Βρίσκουμε λοιπόν $\alpha = \frac{1}{2}$ ή $\alpha = -\frac{1}{4}$.

Αν $\alpha = 1/2$ τότε $P(\omega_1) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8} = \frac{11}{8} > 1$, αδύνατο

Αν $\alpha = -1/4$ τότε $P(\omega_1) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{8} = \frac{5}{8} \in [0, 1]$

$$P(\omega_2) = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \in [0, 1]$$

και $P(\omega_3) = -\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16} \in [0, 1]$.

Ώστε $\alpha = -\frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 97

Ένα test έχει τέσσερις ερωτήσεις και κάθε ερώτηση πρέπει να απαντηθεί με ένα Α ή με ένα Β ή με ένα Γ. Ένας εξεταζόμενος απαντά εντελώς τυχαία στις ερωτήσεις. Να βρείτε τις πιθανότητες

i) Ν απαντήσει σωστά σε όλες τις ερωτήσεις

ii) Να απαντήσει λάθος σε όλες τις ερωτήσεις

iii) Να απαντήσει σωστά σε μία τουλάχιστον ερώτηση.

ΛΥΣΗ

i) Αν Κ το ενδεχόμενο να απαντήσει σωστά σε όλες τις ερωτήσεις τότε $N(K)=1$

Επίσης $N(\Omega) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

Άρα $P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{1}{81}$.

ii) Αν Λ το ενδεχόμενο να απαντήσει λάθος σε όλες τις ερωτήσεις τότε $N(\Lambda) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4 = 16$, διότι κάθε ερώτηση μπορεί να απαντηθεί λάθος με 2 τρόπους.

Άρα $P(\Lambda) = \dfrac{N(\Lambda)}{N(\Omega)} = \dfrac{16}{81}$.

iii) Το ενδεχόμενο ν' απαντήσει σωστά σε μία τουλάχιστον ερώτηση είναι το Λ'.

Άρα $P(\Lambda') = 1 - P(\Lambda) = 1 - \dfrac{16}{81} = \dfrac{65}{81}$.

ΘΕΜΑ 98

Ένα κουτί περιέχει 15 σφαίρες άσπρες, κόκκινες και μαύρες. Επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα.

Αν η πιθανότητα η σφαίρα να μην είναι άσπρη είναι τριπλάσια από την πιθανότητα να είναι κόκκινη και η πιθανότητα να μην είναι κόκκινη είναι διπλάσια από την πιθανότητα να είναι μαύρη, να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες κόκκινες και πόσες μαύρες σφαίρες έχει το κουτί.

ΛΥΣΗ

Έστω x, y, ω το πλήθος των άσπρων, κόκκινων και μαύρων σφαιρών αντίστοιχα που περιέχει το κουτί.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: Η σφαίρα είναι άσπρη

Β: Η σφαίρα είναι κόκκινη

Γ: Η σφαίρα είναι μαύρη

Είναι $x + y = \omega = 15$ (1)

Επίσης $P(A') = 3P(B)$. Δηλαδή $\dfrac{y+\omega}{15} = 3\,\dfrac{y}{15}$.

Οπότε $y + \omega = 3y$. Βρίσκουμε λοιπόν $\omega = 2y$ (2)

και $P(B') = 2P(\Gamma)$. Δηλαδή $\dfrac{x+\omega}{15} = 2\,\dfrac{\omega}{15}$.

Οπότε $x + \omega = 2\omega$. Βρίσκουμε λοιπόν $x = \omega$ (3)

Συνεπώς έχουμε

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\left\{\begin{matrix}x+y+\omega=15\\ \omega=2y\\ x=\omega\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}2y+y+2y=15\\ \omega=2y\\ x=\omega\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}y=3\\ \omega=6\\ x=6\end{matrix}\right.$$

Ώστε το κουτί περιέχει 6 άσπρες, 3 κόκκινες και 6 μαύρες σφαίρες.

ΘΕΜΑ 99

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα ν φορές. Αν η πιθανότητα εμφάνισης μίας τουλάχιστον φοράς της όψης κεφαλή είναι ίση με $\frac{15}{16}$ να βρείτε πόσες φορές ρίξαμε το νόμισμα.

ΛΥΣΗ

Έστω το ενδεχόμενο Α: Να εμφανιστεί μία τουλάχιστον φορά κεφαλή οπότε Α΄: Να εμφανιστούν ν-φορές γράμματα.

Προφανώς $N(A') = 1$ και $N(\Omega) = \underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{\nu\ \text{φορές}} = 2^{\nu}$

Άρα $P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{1}{2^{\nu}}$ και $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{2^{\nu}}$.

Είναι $P(A) = \frac{15}{16}$ δηλαδή $1 - \frac{1}{2^{\nu}} = \frac{15}{16}$ ισοδύναμα $\frac{1}{2^{\nu}} = 1 - \frac{15}{16}$.

Οπότε $\frac{1}{2^{\nu}} = \frac{1}{16}$. Βρίσκουμε λοιπόν $\nu = 4$.

Ώστε ρίξαμε το νόμισμα 4 φορές.

ΘΕΜΑ 100

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x - 2y = 0 \\ 3x - \lambda y = 0, \quad \kappa, \lambda \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Ρίχνουμε ένα κόκκινο και ένα λευκό ζάρι και θέτουμε όπου κ την ένδειξη του κόκκινου και όπου λ την ένδειξη του λευκού ζαριού.

Να βρείτε τις πιθανότητες των εδεχομένων

Α: «Το (Σ) έχει μοναδική λύση»

Β: «Το (Σ) έχει και μη μηδενικές λύσεις»

Γ: «Το (Σ) έχει και μη μηδενικές λύσεις της μορφής $(x, y)=(t, t), t \in \mathbb{R}$»

ΛΥΣΗ

Το (Σ) είναι 2x2 γραμμικό και ομογενές με $D = \begin{vmatrix} \kappa & -2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\kappa\lambda + 6$.

Θεωρούμε τον παρακάτω πίνακα «διπλής εισόδου»

Λευκό ζάρι

κόκκινο ζάρι	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Γνωρίζουμε ότι το (Σ) σαν ομογενές έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $D \neq 0$ και άπειρες λύσεις αν και μόνο αν $D = 0$

Από τον πίνακα έχουμε: $P(A) = \frac{36-4}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$, $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \kappa t - 2t = 0 \\ 3t - \lambda t = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (\kappa - 2)t = 0 \\ (3 - \lambda)t = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$. Άρα $P(\Gamma) = \frac{1}{36}$.

ΘΕΜΑ 101

Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης να δείξετε ότι
$$P(A \cap B) - P(A)\,P(B) = P(A' \cap B') - P(A')\,P(B') = P(A)\,P(B') - P(A \cap B')$$

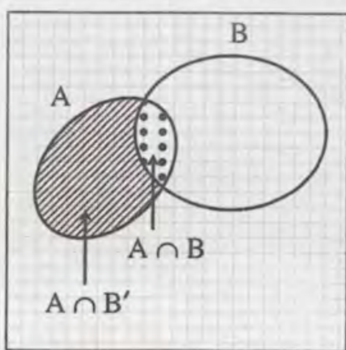
ΛΥΣΗ

Είναι $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

και $P(A')\,P(B') = [1 - P(A)]\,[1 - P(B)] = 1 - P(B) - P(A) + P(A)\,P(B)$

Άρα $P(A'\cap B') - P(A')P(B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B) - 1 + P(B) + P(A) - P(A)P(B) =$
$= P(A \cap B) - P(A)\,P(B)$

Επίσης $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$ και $(A \cap B') \cap (A \cap B) = \varnothing$.

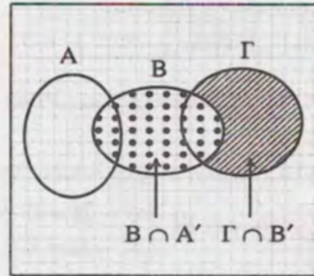


Οπότε $P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A)$.
Δηλαδή $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$.
Επομένως $P(A)\,P(B') - P(A \cap B') =$
$= P(A)[1 - P(B)] - P(A) + P(A \cap B) =$
$= P(A) - P(A)\,P(B) - P(A) + P(A \cap B) =$
$= P(A \cap B) - P(A)\,P(B)$. Ώστε
$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A'\cap B') - P(A')P(B') =$
$= P(A)\,P(B') - P(A \cap B')$.

ΘΕΜΑ 102

Έστω Α,Β,Γ ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης τέτοια ώστε $A \cap \Gamma = \varnothing$, $P(\Gamma \cap B') = p_1$, $P(B \cap A') = p_2$ και $P(A \cup B \cup \Gamma) = p_3$. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A \cup B)$.

ΛΥΣΗ



Είναι $A \cup (B \cap A') \cup (\Gamma \cap B') = A \cup B \cup \Gamma$ και τα ενδεχόμενα $A, B \cap A', \Gamma \cap B'$ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα. Άρα
$P[(A \cup (B \cap A') \cup (\Gamma \cap B')] = P(A \cup B \cup \Gamma)$
Δηλαδή $P(A) + P(B \cap A') + P(\Gamma \cap B') =$
$= P(A \cup B \cup \Gamma)$. Οπότε παίρνουμε
$P(A) = p_3 - p_1 - p_2$.

Επίσης $A \cup (B \cap A') = A \cup B$ και $A \cap (B \cap A') = \varnothing$.
Άρα $P[A \cup (B \cap A')] = P(A \cup B)$. Δηλαδή $P(A) + P(B \cap A') = P(A \cup B)$.
Οπότε παίρνουμε $P(A \cup B) = p_3 - p_1 - p_2 + p_2 = p_3 - p_1$.

β' τρόπος: $(A \cup B) \cup (\Gamma \cap B') = A \cup B \cup \Gamma$ και $(A \cup B) \cap (\Gamma \cap B') = \varnothing$.
Άρα $P[(A \cup B) \cup (\Gamma \cap B')] = P(A \cup B \cup \Gamma)$. Δηλαδή
$P(A \cup B) + P(\Gamma \cap B') = P(A \cup B \cup \Gamma)$. Οπότε βρίσκουμε $P(A \cup B) = p_3 - p_1$.

ΘΕΜΑ 103

**Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$, $\Gamma = \{\omega_1, \omega_3\}$.
Αν ισχύουν οι σχέσεις**

$$P(A') - 3P(B) + \lambda P(\Gamma) = 0$$
$$\lambda P(A) - 2P(B) - \lambda P(\Gamma') = 0$$
$$(\lambda - 3)P(A') + P(B') - P(\Gamma') = 0$$

όπου λ σταθερός ακέραιος αριθμός, να βρείτε τους αριθμούς

$$\lambda,\ P(\omega_1),\ P(\omega_2),\ P(\omega_3)$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} P(A') - 3P(B) + \lambda P(\Gamma) = 0 \\ \lambda P(A) - 2P(B) - \lambda P(\Gamma') = 0 \\ (\lambda - 3)P(A') + P(B') - P(\Gamma') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(\omega_3) - 3[P(\omega_2)+P(\omega_3)]+\lambda[P(\omega_1)+P(\omega_3)]=0 \\ \lambda[P(\omega_1)+P(\omega_2)]-2[P(\omega_2)+P(\omega_3)]-\lambda P(\omega_2)=0 \\ (\lambda-3)P(\omega_3)+P(\omega_1)-P(\omega_2) = 0 \end{cases}$$

δηλαδή $\begin{cases} \lambda P(\omega_1) - 3P(\omega_2) + (\lambda - 2)P(\omega_3) = 0 \\ \lambda P(\omega_1) - 2P(\omega_2) - 2P(\omega_3) = 0 \\ P(\omega_1) - P(\omega_2) + (\lambda - 3)P(\omega_3) = 0, \ \lambda \in Z \end{cases}$ (Σ)

Πρόκειται για 3x3 ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο έχει και μη μηδενικές λύσεις $(P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3))$ διότι $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = 1$. Δηλαδή

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -3 & \lambda-2 \\ \lambda & -2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0 \overset{\Gamma_1-\Gamma_2}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} 0 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda(-\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

και τελικά $\lambda = 2$, (διότι $\lambda \in Z$). Για $\lambda = 2$ το (Σ) γίνεται

$$\begin{cases} 2P(\omega_1) - 3P(\omega_2) = 0 \\ 2P(\omega_1) - 2P(\omega_2) - 2P(\omega_3) = 0 \\ P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P(\omega_1) - 3P(\omega_2) = 0 \quad (1) \\ P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Επίσης ισχύει $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = 1$ (3)

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) βρίσκουμε

$P(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{3}$ και $P(\omega_3) = \frac{1}{6}$.

ΘΕΜΑ 104

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^x = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ δεν έχει στο $(1, +\infty)$ άλλη ρίζα εκτός από το 2.

ii) Έχουμε δύο test.
Το 1ο test έχει ν ερωτήσεις (ν > 1) και σε κάθε ερώτηση αντιστοιχούν 2 απαντήσεις (εκ των οποίων ακριβώς μία είναι σωστή).
Το 2ο test έχει 2 ερωτήσεις και σε κάθε ερώτηση αντιστοιχούν ν απαντήσεις (εκ των οποίων ακριβώς μία είναι σωστή).
Ένας εξεταζόμενος επιλέγει εντελώς τυχαία μία απάντηση σε κάθε ερώτηση των δύο test. ▶

▶

α) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
A: Ο εξεταζόμενος απαντά σωστά σε μία τουλάχιστον ερώτηση του 1ου test.
B: Ο εξεταζόμενος απαντά σωστά σε μία τουλάχιστον ερώτηση του 2ου test.

β) Αν $P(A) = P(B)$ να βρείτε το ν.

ΛΥΣΗ

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x - \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$.

Είναι $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \left(\frac{x}{x-1}\right)' = 2^x \ln 2 - 2\,\frac{x}{x-1}\,\frac{-1}{(x-1)^2} =$

$= 2^x \ln 2 + \frac{2x}{(x-1)^3} > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Άρα η f είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει στο διάστημα $(1, +\infty)$ άλλη ρίζα εκτός από την προφανή $x = 2$.

ii) **α)** Το ενδεχόμενο A΄ είναι να απαντήσει ο εξεταζόμενος λάθος σε όλες τις ερωτήσεις. Οπότε $N(A') = 1$, διότι σε κάθε ερώτηση αντιστοιχεί ακριβώς μία λανθασμένη απάντηση.

Άρα $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{N(A')}{N(\Omega)} = 1 - \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{\nu \text{ φορές}}} = 1 - \frac{1}{2^\nu}$

Το ενδεχόμενο B΄ είναι να απαντήσει ο εξεταζόμενος λάθος σε όλες τις ερωτήσεις. Οπότε $N(B') = (\nu - 1)(\nu - 1) = (\nu - 1)^2$, διότι σε κάθε ερώηση αντιστοιχούν ακριβώς $(\nu - 1)$ λανθασμένες απαντήσεις.

Άρα $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{(\nu-1)^2}{\nu \cdot \nu} = 1 - \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2$.

β) Έστω ότι ισχύει $P(A) = P(B)$.

Δηλαδή $1 - \frac{1}{2^\nu} = 1 - \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^\nu} = \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2 \Leftrightarrow 2^\nu = \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^2$.

Όμως $\nu > 1$ οπότε σύμφωνα με το ερώτημα (i) συμπεραίνουμε ότι $\nu = 2$.

ΘΕΜΑ 105

i) Αν $\varkappa + \lambda + \mu = 1$ να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \varkappa & \lambda & \mu \\ \mu & \varkappa & \lambda \\ \lambda & \mu & \varkappa \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[(\varkappa-\lambda)^2 + (\varkappa-\mu)^2 + (\lambda-\mu)^2\right]$$

ii) Έστω οι δειγματικοί χώροι $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και $\Omega' = \{\omega_1', \omega_2', \omega_3'\}$ δύο πειραμάτων τύχης. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$P(\omega_1)\,P(\omega_1') + P(\omega_2)\,P(\omega_2') = 2P(\omega_3)\,P(\omega_3')$

$P(\omega_3)\,P(\omega_1') + P(\omega_1)\,P(\omega_2') = 2P(\omega_2)\,P(\omega_3')$ και

$P(\omega_2)\,P(\omega_1') = P(\omega_3)\,P(\omega_2') = 2P(\omega_1)\,P(\omega_3')$

να δείξετε ότι $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_3') = \frac{1}{3}$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\begin{vmatrix} \varkappa & \lambda & \mu \\ \mu & \varkappa & \lambda \\ \lambda & \mu & \varkappa \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varkappa+\lambda+\mu & \lambda & \mu \\ \varkappa+\lambda+\mu & \varkappa & \lambda \\ \varkappa+\lambda+\mu & \mu & \varkappa \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \varkappa & \lambda \\ 1 & \mu & \varkappa \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & \varkappa-\lambda & \lambda-\mu \\ 0 & \mu-\lambda & \varkappa-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varkappa-\lambda & \lambda-\mu \\ \mu-\lambda & \varkappa-\mu \end{vmatrix} =$

$= \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 - \varkappa\lambda - \varkappa\mu - \lambda\mu =$

$= \frac{1}{2}\left(2\varkappa^2 + 2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\varkappa\lambda - 2\varkappa\mu - 2\lambda\mu\right) = \frac{1}{2}\left[(\varkappa-\lambda)^2 + (\varkappa-\mu)^2 + (\lambda-\mu)^2\right]$

ii) Θέτουμε $P(\omega_1) = \alpha$, $P(\omega_2) = \beta$, $P(\omega_3) = \gamma$, $P(\omega_1') = x$, $P(\omega_2') = y$ και $P(\omega_3')$ $= z$ οπότε οι δεδομένες σχέσεις γράφονται

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 2\gamma z \\ \gamma x + \alpha y = 2\beta z \\ \beta x + \gamma y = 2\alpha z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta y - 2\gamma z = 0 \\ \gamma x + \alpha y - 2\beta z = 0 \\ \beta x + \gamma y - 2\alpha z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Το (Σ) είναι 3x3 ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς x, y, z το οποίο έχει και μη μηδενικές λύσεις διότι $x + y + z = 1$.

Δηλαδή $D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & -2\gamma \\ \gamma & \alpha & -2\beta \\ \beta & \gamma & -2\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow -2\,\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2\right] = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=0.$

Επειδή οι $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)^2$ και $(\beta-\gamma)^2$ είναι μη αρνητικοί ισοδύναμα παίρνουμε

$$\begin{cases}(\alpha-\beta)^2=0\\(\alpha-\gamma)^2=0\\(\beta-\gamma)^2=0\end{cases} \text{ δηλαδή } \begin{cases}\alpha=\beta\\\alpha=\gamma\\\beta=\gamma\end{cases}$$ ισοδύναμα $\alpha=\beta=\gamma$. Όμως $\alpha+\beta+\gamma=1$ οπότε

συμπεραίνουμε ότι $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$. Αντικαθιστώντας στο (Σ) παίρνουμε

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z=0\\ \quad\;\;\text{"}\quad\text{"}\\ \quad\;\;\text{"}\quad\text{"}\end{cases}$$. Δηλαδή $x+y-2z=0$ και επειδή $x+y+z=1$

βρίσκουμε ότι $3z=1$ οπότε $z=\frac{1}{3}$.

Ώστε $P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=P(\omega_3')=\frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ 106

Ένα κουτί περιέχει λευκές, κόκκινες και γαλάζιες σφαίρες. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα από το κουτί.
Αν η πιθανότητα η σφαίρα να είναι λευκή είναι ίση με $\frac{1}{7}$ και η πιθανότητα να μην είναι γαλάζια είναι ίση με $\frac{10}{11}$ να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό των λευκών, κόκκινων και γαλάζιων σφαιρών που μπορεί να υπάρχουν στο κουτί.

ΛΥΣΗ

Έστω x, y, ω το πλήθος των λευκών, κόκκινων και γαλάζιων σφαιρών αντίστοιχα. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Α: Η σφαίρα είναι λευκή

Β: Η σφαίρα είναι γαλάζια

Εχουμε $P(A)=\frac{1}{7}$ δηλαδή $\frac{x}{x+y+\omega}=\frac{1}{7}$ οπότε $x=\frac{1}{7}(x+y+\omega)$ (1)

και $P(B')=\frac{10}{11}$ δηλαδή $1-P(B)=\frac{10}{11}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{11}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\omega}{x+y+\omega}=\frac{1}{11} \text{ οπότε } \omega=\frac{1}{11}(x+y+\omega) \quad (2)$$

Επίσης $y=(x+y+\omega)-x-\omega$ και λόγω των (1), (2) βρίσκουμε

$$y=\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)(x+y+\omega) \text{ δηλαδή } y=\frac{59}{77}(x+y+\omega) \quad (3)$$

Από τις (1), (2), (3) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $x, y, \omega \in N^*$ συμπεραίνουμε ότι τα x, y, ω έχουν την μικρότερη τιμή αν και μόνο αν
$x+y+\omega = $ Ε.Κ.Π. $(7, 11, 77) = 77$. Οπότε $x = 11$, $y = 59$, $\omega = 7$.

β' τρόπος ....

$$\begin{cases} P(A)=\frac{1}{7} \\ P(B')=\frac{10}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-y-\omega=0 \\ x+y-10\omega=0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Βρίσκουμε ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y, \omega)=\left(\frac{11}{7}\omega,\ \frac{59}{7}\omega,\ \omega\right),\quad \omega \in N^*$$

... Οπότε $\omega = 7$, $x = 11$, $y = 59$.

ΘΕΜΑ 107

Για τον νxν πίνακα Α, ισχύει $A^3 = I$. Εκλέγουμε ένα στοιχείο του συνόλου $M = \{A, A^2, A^3, \ldots, A^{99}, A^{100}\}$.

Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου: Το στοιχείο που εκλέξαμε είναι ίσο με τον αντίστροφο του πίνακα Α.

ΛΥΣΗ

α) Αν $A = I$ τότε $A^{\nu} = I$ και $A^{-1} = I$ οπότε όλα τα στοιχεία του Μ είναι ίσα με Ι και το ενδεχόμενο είναι βέβαιο με πιθανότητα 1.

β) Αν $A \neq I$ τότε από τη δοθείσα $A^3 = I$ συμπεραίνουμε ότι $A^2A = I$ δηλαδή $A^{-1} = A^2$. Οι δυνάμεις του πίνακα Α δίνονται από τον τύπο

$$A^{\nu}=\begin{cases} A & \text{αν } \nu = 3\kappa+1 \\ A^2 = A^{-1} & \text{αν } \nu = 3\kappa+2 \\ I & \text{αν } \nu = 3\kappa, \quad \kappa \in N^* \end{cases}$$

απόδειξη: ● $A^{3\kappa+1} = (A^3)^{\kappa}A = I^{\kappa}A = I\,A = A$ (γιατί $I^{\kappa} = I$)

● $A^{3\kappa+2} = (A^3)^{\kappa}A^2 = I^{\kappa}A^2 = IA^2 = A^2 = A^{-1}$

● $A^{3\kappa} = (A^3)^{\kappa} = I^{\kappa} = I$

Άρα στο σύνολο $M = \{A, A^2, A^3, ..., A^{99}, A^{100}\}$ περιέχονται 34 στοιχεία ίσα με A, 33 στοιχεία ίσα με A^{-1} και 33 στοιχεία ίσα με τον I.

Η ζητούμενη λοιπόν πιθανότητα είναι $\frac{33}{100} = 0,33$

ΘΕΜΑ 108

Σε τηλεοπτικό παιγνίδι, παρουσιάζονται στον παίκτη τρία κουτιά, απόλυτα όμοια εξωτερικά, τα κουτιά α, β, γ, ένα και μόνο από τα οποία, περιέχει το σημαντικό ποσό, δώρο του παιγνιδιού. Ο παίκτης καλείται να επιλέξει ένα από τα τρία κουτιά, και αυτός επιλέγει τυχαία το α. Αυτός που διευθύνει το παιγνίδι, γνωρίζει ποιο κουτί περιέχει το ποσό, δώρο του παιγνιδιού. Ανεξάρτητα λοιπόν από το αν ο παίκτης πέτυχε ή όχι το σωστό κουτί, αυτός (κατά πάγια τακτική του παιγνιδιού) ανοίγει εκείνο από τα β και γ που δεν περιέχει σίγουρα το δώρο του παιγνιδιού. (Τούτο σημαίνει ότι ανοίγει το β αν το ποσό βρίσκεται στο γ, είτε ένα οποιοδήποτε από τα β, γ αν βρίσκεται στο α). Μετά το άνοιγμα του κουτιού αυτού ζητάει από τον παίκτη να αποφασίσει αν θα επιμείνει στο κουτί α είτε θα προτιμήσει εκείνο από τα β και γ που απέμεινε.

Τι συμφέρει από άποψη πιθανότητας να προτιμήσει ο παίκτης;

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A = (Το ποσό βρίσκεται στο κουτί α) και

E = A΄ = (το ποσό βρίσκεται σε κάποιο από τα β, γ).

Είναι προφανώς $p(A) = \frac{1}{3}$ και $p(E) = 1 - p(A) = \frac{2}{3}$.

Θεωρούμε τέλος και το ενδεχόμενο

E_1 = (το ποσό βρίσκεται σε εκείνο το κουτί από τα β, γ που δεν ανοίχθηκε).

Παρατηρούμε, ότι η πραγματοποίηση ενός οποιουδήποτε από τα ενδεχόμενα E_1 και E συνεπάγεται την πραγματοποίηση του άλλου, άρα αυτά είναι ισοδύναμα και έχουμε

$$p(E_1) = p(E) = \frac{2}{3}$$

Συμφέρει λοιπόν στον παίκτη, να αλλάξει προτίμηση, επιλέγοντας το κουτί από τα β, γ που δεν έχει ακόμα ανοιχθεί.

ΘΕΜΑ 109

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w τέτοιους ώστε να είναι

$$3w + 2Re(w) = z + 5 + 6i \quad (1)$$

Να δείξετε ότι αν το αντίστοιχο σημείο P(z) κείται στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, τότε το σημείο M(w) κείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $z = x + yi$, $w = u + \upsilon i$, όπου $x, y, u, \upsilon \in \mathbb{R}$.

Η (1) ισοδυναμεί με το σύστημα

$\{5u = x + 5$ και $3\upsilon = y + 6\}$ δηλαδή με το $\{x = 5(u-1)$ και $y = 3(\upsilon - 2\}$

Η συνθήκη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ είναι λοιπόν ισοδύναμη με την $(u-1)^2 + (\upsilon - 2)^2 = 1$.

Η τελευταία εκφράζει ότι το σημείο $M(w = u + \upsilon i)$ είναι σημείο του κύκλου με κέντρο το $K(w_0 = 1 + 2i)$ και ακτίνα $R = 1$.

ΘΕΜΑ 110

α) Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$ δύο μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$. Να δείξετε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο λόγος $\frac{z_1}{z_2}$ πραγματικός αριθμός είναι η $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

β) Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $z_1 \neq z_2$, να δείξετε ότι για να είναι τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ του μιγαδικού επιπέδου συνευθειακά, πρέπει και αρκεί να είναι ο λόγος $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ ίσος με πραγματικό αριθμό.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία είναι $Im(z) \neq 0$ και τα σημεία A(1), M(z), $B(z^3)$ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

α) Είναι κατά τα γνωστά (όταν $z_2 = \gamma + \delta i \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} i$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha\delta - \delta\beta\gamma = 0$

β) Θέτουμε $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_3 = x_3 + y_3 i$ με $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Είναι γνωστό, ότι τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι συνευθειακά τότε και μόνο, όταν ισχύει η επόμενη συνθήκη

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\ (\Sigma)$. Η (Σ) γράφεται $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ δηλαδή $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = 0$

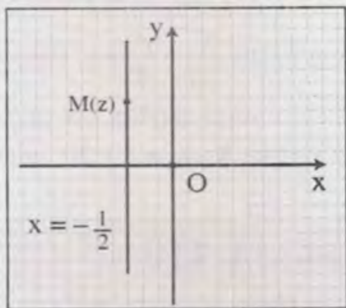
και εκφράζει την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο αριθμός $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ πραγματικός (είναι $z_2 - z_1 \neq 0$).

γ) Εφ' όσον $\text{Im}(z) \neq 0$ οπότε και $z \neq 1$, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τα Α,Μ,Β συνευθειακά, είναι να έχουμε

$\frac{z^3 - 1}{z - 1}$ = πραγματικός, δηλαδή $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.

Είναι όμως (για $z = x + yi$),

$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + (2xy + y)i$, οπότε η συνθήκη γίνεται $2xy + y = 0$ και τελικά



$x = -\frac{1}{2}$, αφού $y \neq 0$. Άρα ο ζητούμενος γ. τόπος είναι η ευθεία $x = -\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 111

α) Να δείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z^2 + iz - 1 = 0$, έχουμε και $z^3 = -i$

β) Αν ο αριθμός w ($w \in \mathbb{C}$) είναι ρίζα της εξίσωσης

$(z^{1995} + 1)^2 + iz^{1995} = 1 - i$

να δείξετε ότι θα είναι και $(w^{1995} + 1)^{1995} = -i$.

ΛΥΣΗ

α) Εστω ότι ισχύει $z^2 + iz - 1 = 0$. Τότε $z^2 = 1 - iz$ οπότε $z^3 = z^2 z = z - iz^2$ δηλαδή $z^3 = z - iz^2$. Όμως $z^2 = 1 - iz$ και βρίσκουμε $z^3 = z - i(1 - iz)$ δηλαδή $z^3 = z - i + i^2 z = z - i - z = -i$. Θα είναι λοιπόν $z^3 = -i$.

β) Θα είναι $(w^{1995}+1)^2 + iw^{1995} = 1 - i$ άρα και $(w^{1995}+1)^2 + i(w^{1995}+1) - 1 = 0$.
Θέτοντας $w^{1995} + 1 = w_1$, βρίσκουμε ότι $w_1^2 + iw_1 - 1 = 0$. Συνέπεια όμως του τελευταίου συμπεράσματος, είναι ότι θα είναι και $w_1^3 = -i$.
Τότε όμως, είναι και $(w^{1995}+1)^{1995} = w_1^{1995} = (w_1^3)^{665} = (-i)^{665} = -i^{665}$.
Έχουμε επίσης $i^4 = 1$, οπότε $i^{665} = (i^4)^{166} \cdot i = 1 \cdot i = i$, και τελικά βρίσκουμε $(w^{1995}+1)^{1995} = w_1^{1995} = -i^{664} = -i$.

ΘΕΜΑ 112

Αν $\alpha + \beta i \neq 0$ να βρείτε τον $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε να ισχύει

$$(2\alpha + 2\beta i)^\nu + 2(-\beta + \alpha i)^\nu + 2(\beta - \alpha i)^\nu = 0$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι $(\alpha + \beta i)i = -\beta + \alpha i$ και $-(\alpha + \beta i)i = \beta - \alpha i$.
Συνεπώς η εξίσωση $(2\alpha + 2\beta i)^\nu + 2(-\beta + \alpha i)^\nu + 2(\beta - \alpha i)^\nu = 0$ γράφεται
$[2(\alpha + \beta i)]^\nu + 2[(\alpha + 2\beta i)i]^\nu + 2[-(\alpha + 2\beta i)i]^\nu = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^\nu(\alpha + \beta i)^\nu + 2(\alpha + \beta i)^\nu \cdot i^\nu + 2(\alpha + \beta i)^\nu(-i)^\nu = 0$. Από τα δεδομένα όμως έχουμε $\alpha + \beta i \neq 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $2^\nu + 2i^\nu + 2(-i)^\nu = 0$.

- **Αν $\nu = 4\kappa$,** με $\kappa \in \mathbb{N}^*$, τότε $i^\nu = 1$ και $(-i)^\nu = 1$ οπότε η (1) είναι αδύνατη
- **Αν $\nu = 4\kappa+1$,** με $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε $i^\nu = 1$ και $(-i)^\nu = -i$ οπότε η (1) είναι αδύνατη
- **Αν $\nu = 4\kappa+2$,** με $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε $i^\nu = -1$ και $(-i)^\nu = -1$ οπότε η (1) γίνεται
  $2^\nu - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^\nu = 2^2 \Leftrightarrow \nu = 2$ (δεκτή διότι είναι της μορφής $4\kappa + 2$).
- **Αν $\nu = 4\kappa+3$,** με $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε $i^\nu = -i$ και $(-i)^\nu = i$ οπότε η (1) είναι αδύνατη

Ώστε το πρόβλημα έχει ακριβώς μία λύση το $\nu = 2$.

ΘΕΜΑ 113

Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z - 1| = \eta\mu^2\theta$ να δείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta \leq |z| \leq 1 + \eta\mu^2\theta$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $|z| = |(z-1) + 1|$.
Όμως $||z-1| - 1| \leq |(z-1) + 1| \leq |z-1| + 1$ δηλαδή $|\eta\mu^2\theta - 1| \leq |z| \leq \eta\mu^2\theta + 1$
Οπότε παίρνουμε τελικά $\sigma\upsilon\nu^2\theta \leq |z| \leq 1 + \eta\mu^2\theta$.

ΘΕΜΑ 114

Οι μιγαδικοί αριθμοί z και w συνδέονται με τη σχέση

$$w\cdot Re(z) - \overline{w}\, Im(z) = 2(1+i) - 2i\,\overline{w}$$

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο τουλάχιστον λύσεις ως προς w, διαφορετικές μεταξύ τους, να δείξετε ότι η εικόνα του z, στο μιγαδικό επίπεδο, ανήκει σε μία ισοσκελή υπερβολή της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

Έστω $z = x + yi$ και $w = \alpha + \beta i$, με $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $wRe(z) - \overline{w}\, Im(z) = 2(1+i) - 2i\overline{w} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta i)x - (\alpha - \beta i)y = 2 + 2i - 2i(\alpha - \beta i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha x + \beta x i - \alpha y + \beta y i = 2 + 2i - 2\alpha i - 2\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha x - \alpha y) + (\beta x + \beta y)i = (2 - 2\beta) + (2 - 2\alpha)i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x - \alpha y = 2 - 2\beta \\ \beta x + \beta y = 2 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\alpha + 2\beta = 2 \\ 2\alpha + (x+y)\beta = 2 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος το παραπάνω σύστημα (Σ) έχει τουλάχιστον δύο λύσεις ως προς (α, β) διαφορετικές μεταξύ τους.

Συνεπώς έχει άπειρες οπότε

$D = 0$ δηλαδή $\begin{vmatrix} x-y & 2 \\ 2 & x+y \end{vmatrix} = 0$ ισοδύναμα $x^2 - y^2 - 4 = 0$ δηλαδή $x^2 - y^2 = 4$.

Ώστε η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στην ισοσκελή υπερβολή c: $x^2 - y^2 = 4$.

ΘΕΜΑ 115

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$ και τέτοιος ώστε να είναι $Im\left(\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\right)^2 = 0$

Να δείξετε ότι θα είναι $|z| = 1$ (GM 1981 Manole).

ΛΥΣΗ

Εφ' όσον για τον αριθμό

$$\omega = \frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = 1 + \frac{2z}{1-z+z^2}$$

είναι $Im(w) = 0$, θα είναι $w \in \mathbb{R}$, άρα λοιπόν είναι επίσης $\overline{w} = w$.

Είναι όμως $\overline{w} = \dfrac{1+\overline{z}+\overline{z}^2}{1-\overline{z}+\overline{z}^2} = 1 + \dfrac{2\overline{z}}{1-\overline{z}+\overline{z}^2}$

και η σχέση $\overline{w} = w$ γίνεται

$$1 + \frac{2\overline{z}}{1-\overline{z}+\overline{z}^2} = 1 + \frac{2z}{1-z+z^2}$$

● Οι συνθήκες $w \in \mathbb{R}$, $Im(w) = 0$ και $\overline{w} = w$ εκφράζουν όλες ότι ο w είναι πραγματικός και είναι ισοδύναμες. Για να αποφύγουμε τις πολλές πράξεις, λύνουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μόνο τα σύμβολα των μιγάδων και των συζυγών τους, χωρίς να τους παραστήσουμε συναρτήσει του πραγματικού και φανταστικού μέρους.

οπότε είναι $2\overline{z}(1 - z + z^2) = 2z(1 - \overline{z} + \overline{z}^2)$ και $\overline{z} + \overline{z}z^2 = z + z\overline{z}^2$ δηλαδή $(\overline{z} - z) - z\overline{z}(\overline{z} - z) = 0$ και τελικά $(\overline{z} - z)(1 - z\overline{z}) = 0$.

Όμως $\overline{z} \neq z$, αφού $z \notin \mathbb{R}$, οπότε έχουμε $1 - z\overline{z} = 0$, άρα και $|z|^2 = 1$ και τελικά $|z| = 1$.

● **αντίστροφα** αν $|z| = 1$, είναι $1 - z\overline{z} = 0$, οπότε $(\overline{z} - z)(1 - z\overline{z}) = 0$ και καταλήγουμε εύκολα στο συμπέραμσα $\overline{w} = w$.

Συμπεραίνουμε ότι τότε είναι και $Im(w) = 0$.

ΘΕΜΑ 116

Να βρεθεί ο γ. τόπος των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ο αριθμός

$$2z^2 - |z|^2 - (1 + 3i)z - (1 - 3i)\overline{z} - 5$$

είναι φανταστικός.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ και έχουμε

$2z^2 - |z|^2 - (1 + 3i)z - (1 - 3i)\overline{z} - 5 =$

$= 2(x^2 - y^2) + 4xyi - (x^2 + y^2) - (1 + 3i)(x + yi)(1 - 3i)(x - yi) - 5 =$

$= x^2 - 3y^2 - 2x + 6y - 5 + 4xyi.$

Για να είναι ο αριθμός $2z^2 - |z|^2 - (1 + 3i)z - (1 - 3i)\overline{z} - 5$ φανταστικός πρέπει και αρκεί να έχουμε

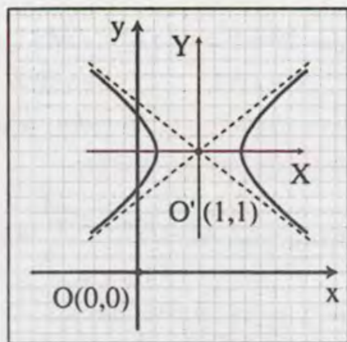
$$x^2 - 3y^2 - 2x + 6y - 5 = 0 \quad (\Sigma)$$

Η συνθήκη (Σ) γράφεται $(x-1)^2 - 3(y-1)^2 = 3$

δηλαδή $\dfrac{(x-1)^2}{3} - (y-1)^2 = 1$ και παριστάνει

υπερβολή με εξίσωση $\dfrac{X^2}{3} - Y^2 = 1$ σε σύστημα

αναφοράς $O'XY$ με αρχή $O'(1,1)$ και άξονες $X'X$, $Y'Y$ παράλληλους και ομόρροπους προς τους $x'x$ και $y'y$.



ΘΕΜΑ 117

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 τέτοιους ώστε να είναι $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = \alpha$ και $|z_1z_2z_3| = \beta$ όπου $\alpha, \beta > 0$.
Να δείξετε ότι υπάρχει ανάμεσά τους τουλάχιστον ένας, έστω z_κ, τέτοιος ώστε να είναι $|z_\kappa| \le \dfrac{3\beta}{\alpha}$.

(R.M.E.T. 1981 Batinetu)

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|}{|z_1z_2z_3|} = \left|\dfrac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right|$

άρα και $\dfrac{\alpha}{\beta} = \left|\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}\right|$.

Είναι όμως $\left|\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}\right| \le \dfrac{1}{|z_1|} + \dfrac{1}{|z_2|} + \dfrac{1}{|z_3|}$ οπότε έχουμε επίσης

$\dfrac{1}{|z_1|} + \dfrac{1}{|z_2|} + \dfrac{1}{|z_3|} \ge \dfrac{\alpha}{\beta}$ (2)

Είναι φανερό ότι ένας τουλάχιστον από τους προσθετέους

$\dfrac{1}{|z_1|}, \dfrac{1}{|z_2|}, \dfrac{1}{|z_3|}$ είναι $\ge \dfrac{\alpha}{3\beta}$, διότι αλλοιώς το άθροισμα αυτών θα ήταν αυστηρά μικρότερο του $\dfrac{3\alpha}{3\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Έστω ότι είναι λοιπόν $\dfrac{1}{|z_\kappa|} \ge \dfrac{\alpha}{3\beta}$. Τότε για τον αριθμό z_κ θα έχουμε επίσης $|z_\kappa| \le \dfrac{3\beta}{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 118

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ισχύει

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = A \text{ και } \alpha_1\beta_1 \geq \alpha_2\beta_2$$

να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z, θα είναι

$$|z + \alpha_1| + |z + \beta_1| \leq |z + \alpha_2| + |z + \beta_2| \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Το τετράγωνο του πρώτου μέλους της (1) είναι ίσο με

$E_1 = |z + \alpha_1|^2 + |z + \beta_1|^2 + 2|(z + \alpha_1)(z + \beta_1)|$
$= |z + \alpha_1|^2 + |z + \beta_1|^2 + 2|z^2 + (\alpha_1 + \beta_1)z + \alpha_1\beta_1|$

Όμως $|z+\alpha_1|^2=(z+\alpha_1)(\bar{z}+\alpha_1)=|z|^2+(z+\bar{z})\alpha_1+\alpha_1^2$

και $|z+\beta_1|^2=|z|^2+(z+\bar{z})\beta_1+\beta_1^2$ οπότε

$|z+\alpha_1|^2 + |z+\beta_1|^2 = 2|z|^2 + (z + \bar{z})A + \alpha_1^2 + \beta_1^2$

● Παρουσιάζοντας το κοινό μέρος των δύο μελών της (1) και διαγράφοντας τούτο, αναγόμαστε στην απόδειξη ανισότητας πιο απλής μορφής. Το κοινό μέρος τούτο παρουσιάζεται ευκολότερα αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της ζητούμενης στο τετράγωνο.

και επειδή $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1\beta_1 = A^2 - 2\alpha_1\beta_1$ θα είναι τελικά

$E_1 = 2|z|^2 + (z + \bar{z})A + A^2 - 2\alpha_1\beta_1 + 2|z^2 + Az + \alpha_1\beta_1|$

Όμοια το τετράγωνο του δεύτερου μέλους της (1), αποδεικνύεται ίσο με

$E_2 = 2|z|^2 + (z + \bar{z})A + A^2 - 2\alpha_2\beta_2 + 2|z^2 + Az + \alpha_2\beta_2|$

Διαγράφοντας τους κοινούς προσθετέους των E_1, E_2, θα δείξουμε ότι είναι

$$|z^2 + Az + \alpha_1\beta_1| - |z^2 + Az + \alpha_2\beta_2| \leq \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$$

Σύμφωνα όμως με τη γνωστή ανισότητα $|w_1| - |w_2| \leq |w_1 - w_2|$ έχουμε

$|z^2 + Az + \alpha_1\beta_1| - |z^2 + Az + \alpha_2\beta_2| \leq |(z^2 + Az + \alpha_1\beta_1) - (z^2 + Az + \alpha_2\beta_2)|$

δηλαδή $|z^2 + Az + \alpha_1\beta_1| - |z^2 + Az + \alpha_2\beta_2| \leq |\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2| = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

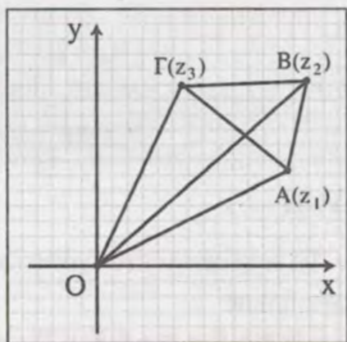
ΘΕΜΑ 119

Έστω Α, Β, Γ τα αντίστοιχα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο των αριθμών $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

α) Να δείξετε ότι είναι $z_1^2(z_2-z_3)+z_2^2(z_3-z_1)+z_3^3(z_1-z_2) = (z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_3)$

β) Να δείξετε ότι (ΑΒ) (ΒΓ) (ΓΑ) ≤ $(0A)^2$(ΒΓ) + $(0B)^2$(ΓΑ) + $(O\Gamma)^2$(ΑΒ)

ΛΥΣΗ



α) Είναι $z_1^2(z_2-z_3)+z_2^2(z_3-z_1)+z_3^3(z_1-z_2) =$

$= (z_1^2 z_2 - z_2^2 z_1) - z_3(z_1^2 - z_2^2) + z_3^2(z_1 - z_2) =$

$= z_1 z_2(z_1 - z_2) - z_3(z_1^2 - z_2^2) + z_3^2(z_1 - z_2) =$

$= (z_1 - z_2)(z_1 z_2 - z_3 z_1 - z_3 z_2 + z_3^2) =$

$= (z_1 - z_2)[z_1(z_2 - z_3) - z_3(z_2 - z_3)] =$

$= (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3).$

β) Θα είναι προφανώς

$|z_1 - z_2|\,|z_1 - z_3|\,|z_2 - z_3| \le |z_1|^2\,|z_2 - z_3| + |z_2|^2\,|z_1 - z_3| + |z_3|^2\,|z_1 - z_2|$

Οπότε $(AB)\,(A\Gamma)\,(B\Gamma) \le (OA)^2(B\Gamma) + (OB)^2(A\Gamma) + (O\Gamma)^2(AB)$.

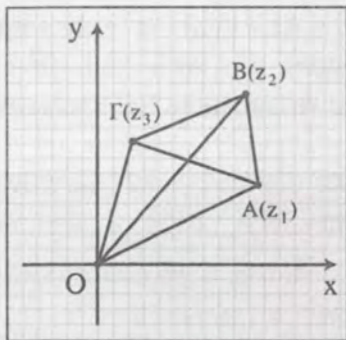
ΘΕΜΑ 120

α) Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι θα είναι

$z_1(z_2 - z_3) + z_2(z_3 - z_1) + z_3(z_1 - z_2) = 0$

β) Για τα αντίστοιχα σημεία $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ του μιγαδικού επιπέδου να δείξετε ότι θα είναι και $(OB)\,(A\Gamma) \le (OA)\,(B\Gamma) + (O\Gamma)\,(AB)$.

ΛΥΣΗ



α) $z_1(z_2 - z_3) + z_2(z_3 - z_1) + z_3(z_1 - z_2) =$

$= z_1 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_3 - z_2 z_1 + z_3 z_1 - z_3 z_2 = 0$

β) Είναι $z_2(z_3 - z_1) = -z_1(z_2 - z_3) - z_3(z_1 - z_2)$

Άρα $|z_2|\,|z_3 - z_1| \le |z_1|\,|z_2 - z_3| + |z_3|\,|z_1 - z_2|$

Οπότε $(OB)\,(A\Gamma) \le (OA)\,(B\Gamma) + (O\Gamma)\,(AB)$.

ΘΕΜΑ 121

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 ισχύουν οι σχέσεις $(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $|z_1 + z_2 + z_3| \neq 3$ να δείξετε ότι

i) $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 3(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$

ii) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2 + z_3^2 - 2z_1z_3 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_2z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3 = 3z_1z_2 + 3z_1z_3 + 3z_2z_3$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)^2 = 3(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$. Έχουμε

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |(z_1 + z_2 + z_3)^2| \overset{(i)}{=} |3(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)| =$$

$$= 3|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3| = 3\,\frac{|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3|}{|z_1|\,|z_2|\,|z_3|} =$$

$$= 3\,\frac{|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3|}{|z_1z_2z_3|} = 3\left|\frac{z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{z_1z_2z_3}\right| = 3\left|\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}\right|$$

Όμως ισχύει $|z_1| = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 1 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ και με τον ίδιο τρόπο

δείχνουμε ότι $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ και $\overline{z_3} = \frac{1}{z_3}$.

Επομένως $3\left|\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}\right| = 3\left|\overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1}\right| = 3\left|\overline{z_3 + z_2 + z_1}\right| = 3|z_3 + z_2 + z_1|$

Δηλαδή $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 3|z_1 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3|(|z_1+z_2+z_3| - 3) = 0$

Είναι όμως $|z_1 + z_2 + z_3| \neq 3$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$, που είναι η ζητούμενη σχέση.

ΘΕΜΑ 122

Αν $z = \alpha + \beta i$ όπου α, β πραγματικοί και τέτοιοι ώστε να είναι

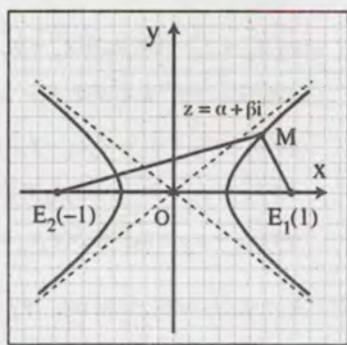
$$\frac{\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta} = 1, \text{ όπου } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

να δείξετε ότι θα είναι και $|z|^2 + |z^2 - 1| = \sigma\upsilon\nu 2\theta$.

(Αντίστοιχη θεωρία Μιγαδικοί αριθμοί - αναλυτική γεωμετρία)

ΛΥΣΗ

Από την υπόθεση $\dfrac{\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \dfrac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta} = 1$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο $M(\alpha, \beta)$ (αντίστοιχο του μιγάδος $z = \alpha + \beta i$) είναι σημείο της υπερβολής με εξίσωση $\dfrac{x^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \dfrac{y^2}{\eta\mu^2\theta} = 1$.



Η υπερβολή αυτή έχει εστίες τα σημεία $E_1(1, 0)$ και $E_2(-1, 0)$, αφού είναι $\gamma^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ οπότε και $\gamma = 1$. Τα σημεία E_1, E_2 αντιστοιχούν στους αριθμούς $z_1 = 1 + 0i = 1$ και $z_2 = -1 + 0i = -1$. Παρατηρούμε επίσης, ότι το σημείο $M(\alpha, \beta)$, θα έχει, σαν σημείο της παραπάνω υπερβολής, την κοινή γεωμετρική ιδιότητα όλων των σημείων αυτής της καμπύλης. Θα έχουμε λοιπόν

$$|ME_2 - ME_1| = 2\sigma\upsilon\nu\theta$$

Είναι όμως

$(ME_2) = |z - (-1)| = |z + 1|$ και $(ME_1) = |z - 1|$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι θα είναι

$$||z + 1| - |z - 1|| = 2\sigma\upsilon\nu\theta$$

άρα και $||z + 1| - |z - 1||^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta$

Σύμφωνα όμως με τον γνωστό κανόνα του παρ/μμου είναι

$$|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2|z|^2 + 2$$

και η τελευταία σχέση γίνεται $2|z|^2 + 2 - 2|z^2 - 1| = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta$

οπότε έχουμε και $|z|^2 - |z^2 - 1| = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 = \sigma\upsilon\nu 2\theta$.

● $M_1(z_1)$ — $M_2(z_2)$

Η απόσταση (M_1M_2) δύο σημείων του μιγαδικού επιπέδου, είναι ίση με $|z_1 - z_2|$, όπου z_1, z_2 οι μιγάδες που αντιστοιχούν στα σημεία αυτά.

● **Κανόνας του παραλληλόγραμμου**

Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει
$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$
(Για τη σημασία και τη χρησιμότητα της ταυτότητας αυτής αναφέρουμε στα προηγούμενα).

● **Σχόλιο.** Οι εξισώσεις βασικών καμπύλων έχουν αποδειχθεί στην αναλυτική γεωμετρία, σαν ισοδύναμες εκφράσεις της κοινής ιδιότητας (γεωμετρικής) των σημείων των καμπυλών τούτων. Μπορούμε λοιπόν να βεβαιώσουμε ότι για το αντίστοιχο σημείο του μιγάδος $z = \alpha + \beta i$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ ισχύει η γεωμετρική συνθήκη που καθορίζει την καμπύλη, άρα τα α, β να επαληθεύουν την εξίσωσή της, και αντίστροφα.

ΘΕΜΑ 123

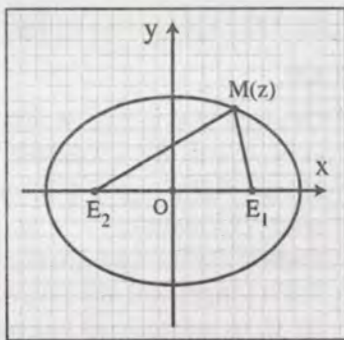
Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και τέτοιος ώστε να είναι

$$\frac{\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta} = 1 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$

Να δείξετε ότι θα έχουμε επίσης και $|z|^2 + |z^2 - \sigma\upsilon\nu 2\theta| = 1$.

ΛΥΣΗ

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το σημείο $M(\alpha, \beta)$ που αντιστοιχεί στον αριθμό $z = \alpha + \beta i$ είναι σημείο της έλλειψης (γ) με εξίσωση $\dfrac{x^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \dfrac{y^2}{\eta\mu^2\theta} = 1$



Θα έχει λοιπόν το M τη γεωμετρική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα σημεία αυτής της έλλειψης, θα είναι δηλαδή $(ME_1) + (ME_2) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ (2) όπου $(ME_1), (ME_2)$ οι αποστάσεις του M από τις εστίες της έλλειψης. Παρατηρούμε ότι είναι $\sigma\upsilon\nu\theta > \eta\mu\theta > 0$, αφού $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, άρα λοιπόν η έλλειψη έχει μεγάλο ημιάξονα ίσο με συνθ και εστίες τα σημεία $E_1(\gamma, 0), E_2(-\gamma, 0)$ με

$\gamma^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = \sigma\upsilon\nu 2\theta$ και $0 < \gamma = \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}$. Οι αντίστοιχοι μιγάδες των εστιών E_1, E_2 είναι λοιπόν $z_1 = \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}$, $z_2 = -\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}$ και έχουμε

$(ME_1) = |z - \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}|$, $(ME_2) = |z + \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}|$.

Η (2) γίνεται $|z - \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}| + |z + \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}| = 2\sigma\upsilon\nu\theta$.

Υψώνουμε τα μέλη της τελευταίας στο τετράγωνο και παίρνουμε

$$|z - \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}|^2 + |z + \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}|^2 + 2|z^2 - \sigma\upsilon\nu 2\theta| = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta.$$

Είναι όμως $\left|z-\sqrt{συν2θ}\right|^2+\left|z+\sqrt{συν2θ}\right|^2 = 2|z|^2+2συν2θ$ και η τελευταία σχέση γίνεται $2|z|^2 + 2συν2θ + 2|z^2 - συν2θ| = 4συν^2θ = 2(1 + συν2θ)$

Άρα λοιπόν είναι και $|z|^2 + συν2θ + |z^2 - συν2θ| = 1 + συνθ$ και τελικά $|z|^2 + |z^2 - συν2θ| = 1$.

ΘΕΜΑ 124

Έστω z και w μιγαδικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε να έχουμε

$$2εφθ\left(z^2+\bar{z}^2\right)-\left(z-\bar{z}\right)^2+4w|z|^2-4εφθ(1-εφθ)i=0 \quad (1)$$

όπου είναι $0<θ<\frac{π}{4}$.

α) Να δείξετε ότι είναι Re(w) < 0 και Im(w) > 0. Να δείξετε κατόπιν, ότι αν είναι $Arg(w)=\frac{3π}{4}$, **τότε το αντίστοιχο σημείο M(z) στο μιγαδικό επίπεδο, είναι σημείο της έλλειψης με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{1-εφθ}+\frac{y^2}{εφθ}=1$$

β) Έστω τώρα ότι είναι $\frac{1}{2}<εφθ<1$. **Να δείξετε ότι θα ισχύει η σχέση**

$$|z|^2+|z^2+2εφθ-1|=2$$

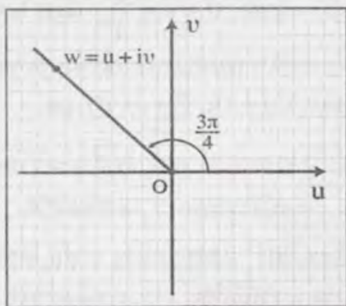
ΛΥΣΗ

● Γράφουμε τους μιγάδες z και w στη μορφή $z=x+iy$, $w=u+iu$ (με $x, y, u, υ \in \mathbb{R}$) και ανάγόμαστε σε πρόβλημα αναλυτικής γεωμετρίας.

α) Θέτουμε $z = x + iy$, $w = u + iυ$ $(x, y, u, υ \in \mathbb{R})$ και έχουμε $z^2+\bar{z}^2=2(x^2-y^2)$, $z-\bar{z}=2iy$ και η (1) γίνεται $4εφθ(x^2-y^2)+4y^2+4(u+iυ)|z|^2-4εφθ(1-εφθ)i=0$ εξισώνουμε με το 0, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος και παίρνουμε $4εφθ(x^2-y^2)+4y^2+4u|z|^2=0$ και $4υ|z|^2-4εφθ(1-εφθ)=0$ και

$$\begin{cases} x^2εφθ+(1-εφθ)y^2=-u|z|^2 & (2)\\ εφθ(1-εφθ)=υ|z|^2 & (3)\end{cases}$$

Συμπεραίνουμε από την (3) ότι θα είναι $υ|z|^2>0$, (αφού $0<εφθ<1$), οπότε θα είναι και $z \neq 0$ και $υ > 0$.



Για τα σημεία της ημιευθείας $Arg(w)=\frac{3π}{4}$ είναι $w = u + iυ$ με $θ + υ = 0$, $u < 0$, $υ > 0$

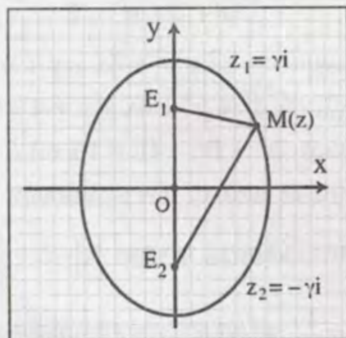
Λόγω και της (2) θα είναι τότε και $-u|z|^2 > 0$ οπότε $u < 0$.

Έστω τώρα ότι $\text{Arg}(w) = \dfrac{3\pi}{4}$. Θα είναι τότε $\upsilon = -u$.

Αφαιρούμε τις (2) και (3) κατά μέλη και παίρνουμε

$$x^2\text{εφθ} + y^2(1 - \text{εφθ}) = \text{εφθ}(1 - \text{εφθ})$$

και τελικά $\dfrac{x^2}{1 - \text{εφθ}} + \dfrac{y^2}{\text{εφθ}} = 1$



β) Έστω ότι είναι $\dfrac{1}{2} < \text{εφθ} < 1$. Είναι τότε

$\text{εφθ} > 1 - \text{εφθ}$. Η έλλειψη έχει εστίες στον φανταστικό άξονα $y'y$, τα σημεία E_1, E_2 των μιγάδων $z_1 = \gamma i$, $z_2 = -\gamma i$ με

● Για τα σημεία Μ της έλλειψης είναι $(ME_1) + (ME_2) = 2\sqrt{\text{εφθ}}$

$\gamma^2 = \text{εφθ} - (1 - \text{εφθ}) = 2\text{εφθ} - 1$. Εφ' όσον λοιπόν το σημείο M(z) είναι σημείο αυτής της έλλειψης, θα είναι

$|z - \gamma i| + |z + \gamma i| = 2\sqrt{\text{εφθ}}$, οπότε $|z - \gamma i|^2 + |z + \gamma i|^2 + 2\left|z^2 + \gamma^2\right| = 4\text{εφθ}$

Είναι όμως $|z - \gamma i|^2 + |z + \gamma i|^2 = 2|z| + 2|\gamma|^2$ και έχουμε

$2|z|^2 + 2\gamma^2 + 2\left|z^2 + \gamma^2\right| = 4\text{εφθ}$.

Η τελευταία γίνεται $|z|^2 + \left|z^2 + 2\text{εφθ} - 1\right| = 2$.

ΘΕΜΑ 125

Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει

$$\text{Arg}\left(\frac{z+2}{z+2+i}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $z = x + yi$ οπότε έχουμε

$$\frac{z+2}{z+2+i} = \frac{(x+2)+yi}{(x+2)+(y+1)i} = \frac{[(x+2)+yi]\,[(x+2)-(y+1)i]}{[(x+2)+(y+1)i]\,[(x+2)-(y+1)i]} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2+4x+y+4)+(-x-2)i}{(x+2)^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2+4x+y+4}{(x+2)^2+(y+1)^2} + \frac{-x-2}{(x+2)^2+(y+1)^2} i$$

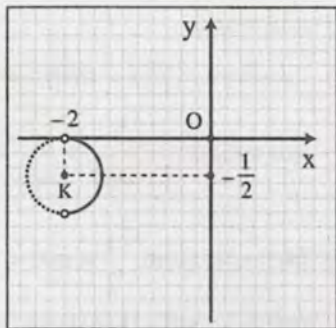
Όμως $\text{Arg}\left(\frac{z+2}{z+2+i}\right) = \frac{3\pi}{2}$ δηλαδή $\text{Re}\left(\frac{z+2}{z+2+i}\right) = 0$ και $\text{Im}\left(\frac{z+2}{z+2+i}\right) < 0$.

Ισοδύναμα $x^2 + y^2 + 4x + y + 4 = 0$ και $-x-2<0$

Δηλαδή $x^2 + y^2 + 4x + y + 4 = 0$ και $x > -2$

Όμως $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 1 - 16 = 1 > 0$.

Ώστε οι εικόνες των μιγαδικών z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\varrho = \frac{1}{2}$, τα οποία έχουν τετμημένη μεγαλύτερη του -2.



ΘΕΜΑ 126

Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύουν

$$|z| = \sqrt{5}|z+2| = \sqrt{5} \quad (1) \quad \text{και} \quad \text{Arg}\left(\frac{z}{z+2}\right) = \text{Arg}(z) + \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\left|\frac{z}{z+2}\right| = \frac{|z|}{|z+2|}$ το οποίο λόγω της (1) είναι ίσο με $|z|$.

Οπότε από την (2) συμπεραίνουμε ότι $\frac{z}{z+2} = z\,i$. Όμως $z \neq 0$, διότι $|z| = \sqrt{5}$.

Άρα $\frac{1}{z+2} = i$ δηλαδή $(z+2)i = 1$. Θέτουμε $z = x + yi$ οπότε παίρνουμε $(x + yi + 2)i = 1$ δηλαδή $-y + (x+2)i = 1 + 0i$. Δηλαδή $y = -1$ και $x = -2$.

Άρα $z = -2 - i$. Είναι φανερό ότι ο αριθμός $z = -2 - i$ επαληθεύει την (1). Εξετάζουμε αν επαληθεύει την (2).

Είναι $\text{Arg}\left(\frac{z}{z+2}\right) = \text{Arg}\left(\frac{-2-i}{-i}\right) = \text{Arg}\,[(-2-i)i]$. Όμως $\pi < \text{Arg}(-2-i) < \frac{3\pi}{2}$. Συνεπώς $\text{Arg}\,[(-2-i)i] = \text{Arg}(-2-i) + \frac{\pi}{2} = \text{Arg}(z) + \frac{\pi}{2}$

Ώστε ο ζητούμενος μιγαδικός αριθμός είναι ο $z = -2 - i$.

ΘΕΜΑ 127

Έστω η συνάρτηση L: $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ με $L(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$

i) Αν η εικόνα του z, στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται σε ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων να δείξετε ότι η εικόνα του L(z) κινείται σε ευθεία παράλληλη στον x'x.

ii) Αν η εικόνα του $w = \pi i + z - L(z)$, στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται στον x'x και $\text{Im}(z) \neq -\pi$ να δείξετε ότι η εικόνα του z κινείται στο εσωτερικό της λωρίδας που ορίζουν οι ευθείες ε: $x = \pi$ και ε': $x = -\pi$.

ΛΥΣΗ

i) Η εικόνα του $z \neq 0$ κινείται σε ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοιο ώστε $\text{Argz} = \theta$.

Άρα $L(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z) = \ln|z| + i\theta$.

Συνεπώς η εικόνα του L(z) στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y = \theta$.

● **Σχόλιο.** Επειδή το σύνολο τιμών της $\ln|z|$ είναι το $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι η ευθεία $y = \theta$ είναι και ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του L(z).

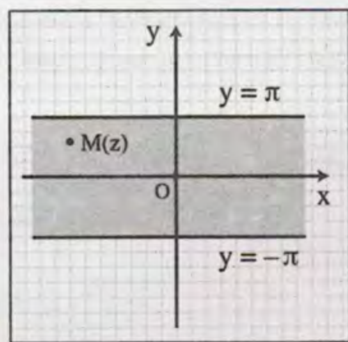
ii) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Οπότε

$w = \pi i + z - L(z) = \pi i + x + yi - \ln|z| - i\text{Arg}(z) =$

$= \left(x - \ln\sqrt{x^2 + y^2}\right) + (\pi + y - \text{Arg}(z))i.$

Η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στον x΄x αν και μόνο αν $w \in \mathbb{R}$ δηλαδή $\text{Im}(w) = 0$ δηλαδή $\pi + y - \text{Arg}(z) = 0$ οπότε $y = \text{Arg}(z) - \pi$.

Όμως $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$ άρα $-\pi \leq \text{Arg}(z) - \pi < \pi$

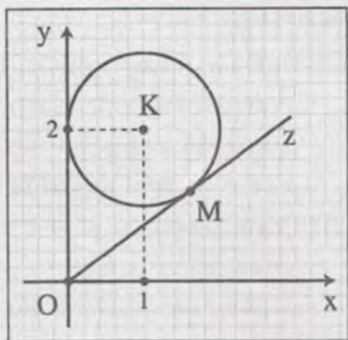


Επίσης είναι $y = \text{Im}(z) \neq -\pi$. Ώστε η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στο εσωτερικό της λωρίδας που ορίζουν οι ευθείες $y = -\pi$ και $y = \pi$.

ΘΕΜΑ 128

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z με το μικρότερο πρωτεύον όρισμα που ικανοποιεί την ισότητα $|z - 1 - 2i| = 1$.

ΛΥΣΗ



Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $|z-(1+2i)|=1$ είναι ο κύκλος με κέντρο την εικόνα του $1+2i$ που είναι το σημείο $K(1, 2)$ και ακτίνα $\varrho=1$ δηλαδή $c: (x-1)^2+(y-2)^2=1$. Ο μιγαδικός με το μικρότερο πρωτεύον όρισμα που η εικόνα του είναι σημείο του παραπάνω κύκλου ανήκει και στην εφαπτομένη αυτού Oz. Έστω λοιπόν $M(x_1, y_1)$ το ζητούμενο σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη του κύκλου στο M έχει εξίσωση $(x-1)(x_1-1)+(y-2)(y_1-2)=1$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ βρίσκουμε $x_1+2y_1=4$ (1)

Όμως το $M(x_1, y_1)$ ανήκει και στον κύκλο $c: (x-1)^2+(y-2)^2=1$ δηλαδή $(x_1-1)^2+(y_1-2)^2=1$ (2).

Τελικά βρίσκουμε $M\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z=\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$.

● **Παρατήρηση** Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε και το σημείο $\Lambda(0, 2)$. Ο αντίστοιχος μιγαδικός $0+2i=2i$ είναι εκείνος με το μεγαλύτερο πρωτεύον όρισμα που ικανοποιεί την ισότητα $|z-1-2i|=1$.

ΘΕΜΑ 129

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w, για τους οποίους ισχύει η σχέση

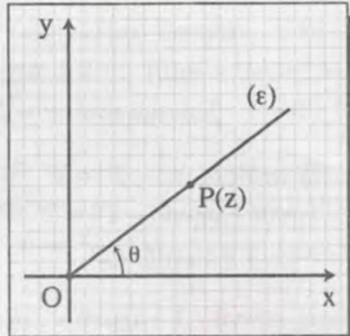
$$w=\frac{Re(z)+3Im(z)-i}{2+i} \quad (1)$$

είναι δε $Arg(z)=\theta$, όπου θ σταθ. με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

α) Έστω ότι ο z μεταβάλλεται έτσι ώστε να είναι $Arg(z)=\theta$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του αντίστοιχου σημείου P(z) στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Να δείξετε ότι το αντίστοιχο σημείο M(w) κείται σε σταθερή ημιευθεία την οποία και να καθορίσετε.

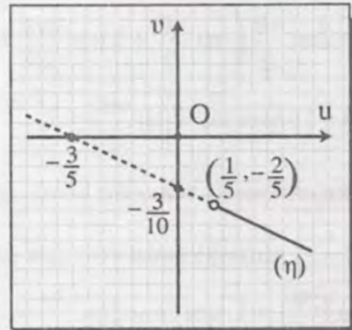
ΛΥΣΗ



α) Θέτουμε $z = x + yi$ και $|z| = \varrho$ θα είναι τότε $z = \varrho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$.

Βρίσκουμε ότι $x = \varrho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \varrho\eta\mu\theta$ οπότε $x\eta\mu\theta = y\sigma\upsilon\nu\theta$ με $x, y \geq 0$. Το αντίστοιχο σημείο P(z) κινείται στην ημιευθεία (ε) με εξίσωση $x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta = 0$, όταν το ϱ μεταβάλλεται στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Έχουμε $w = \dfrac{x+3y-i}{2+i} = \dfrac{1}{5}(x+3y-i)(2-i)$



Οπότε $w = \dfrac{1}{5}[2(x+3y)+1-(x+3y+2)i]$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι

$$u = Re(w) = \frac{2}{5}(x+3y) + \frac{1}{5}$$

και $$\upsilon = Im(w) = -\frac{1}{5}(x+3y) - \frac{2}{5}$$

και τελικά $$u = \frac{2\varrho}{5}(\sigma\upsilon\nu\theta+3\eta\mu\theta) + \frac{1}{5}$$

$$\upsilon = -\frac{\varrho}{5}(\sigma\upsilon\nu\theta+3\eta\mu\theta) - \frac{2}{5}.$$

Για $0 < \varrho < +\infty$ τα u, υ παίρνουν τιμές στα διαστήματα $u > \dfrac{1}{5}$ και $\upsilon < -\dfrac{2}{5}$ και είναι $u + 3\upsilon = -\dfrac{3}{5}$. Το σημείο M(u, υ) που αντιστοιχεί στον μιγαδικό w είναι σημείο της ευθείας (η) με εξίσωση $u + 2\upsilon = -\dfrac{3}{5}$ και κινείται στην ημιευθεία που ορίζεται από τις συνθήκες $u > \dfrac{1}{5}$, $\upsilon < -\dfrac{2}{5}$.

ΘΕΜΑ 130

Να βρεθούν οι αριθμοί $z \in \mathbb{C}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, έτσι ώστε να είναι

$$|z| = 2,\ \left|z^\nu - 2^\nu\right| = 2^{\nu^2-5\nu+10} \text{ και } \frac{\pi}{4} < Argz < \frac{\pi}{2}$$

ΛΥΣΗ

Ο z γράφεται στη μορφή $z = 2(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ με $\theta = \text{Arg}z$, δηλαδή με $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Έχουμε τότε $z^\nu = 2^\nu(\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\eta\mu\nu\theta)$ και η συνθήκη $|z^\nu - 2^\nu| = 2^{\nu^2-5\nu+10}$ γίνεται $|2^\nu(\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\eta\mu\nu\theta) - 2^\nu| = 2^{\nu^2-5\nu+10}$ δηλαδή $|\sigma\upsilon\nu\nu\theta - 1 + i\eta\mu\nu\theta| = 2^{\nu^2-6\nu+10}$ (1).

● Η παρουσία της δύναμης z^ν και τα δεδομένα για το μέτρο και το όρισμα του z μας προτρέπουν να αναζητήσουμε την τριγωνομετρική μορφή του z, να θέσουμε δηλαδή $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, $(\rho = 2)$

Όμως $\sigma\upsilon\nu\nu\theta - 1 + i\eta\mu\nu\theta = 2i\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\theta}{2} - 2\eta\mu^2\frac{\nu\theta}{2} =$

$= 2\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}\left(-\eta\mu\frac{\nu\theta}{2} + i\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\theta}{2}\right)$ και έχουμε $|\sigma\upsilon\nu\nu\theta - 1 + i\eta\mu\nu\theta| = 2\left|\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}\right|$

Η (1) γίνεται $2\left|\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}\right| = 2^{\nu^2-6\nu+10}$ δηλαδή $\left|\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}\right| = 2^{\nu^2-6\nu+9} = 2^{(\nu-3)^2}$ (2)

Παρατηρούμε τώρα ότι είναι $\left|\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}\right| \le 1$ και $2^{(\nu-3)^2} \ge 2^0 = 1$

Η (2) επαληθεύεται τότε και μόνο, όταν είναι $\nu = 3$. Αυτό σημαίνει ότι $\eta\mu^2\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 1$ και $1 - 2\eta\mu^2\frac{3\theta}{2} = \sigma\upsilon\nu3\theta = -1$. Είναι όμως $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, οπότε $\frac{3\pi}{4} < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$, άρα θα είναι και $3\theta = \pi$ και $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Ο z λοιπόν είναι ο αριθμός $z = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 131

Δίνεται η εξίσωση $(\eta\mu^2\theta)z - 4(\eta\mu\theta)z + 4 + 9\sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και έστω Μ η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο εκείνης της ρίζας της που έχει φανταστικό μέρος αρνητικό.
Να δείξετε ότι το Μ κινείται σε μία υπερβολή.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς z με

$\Delta = 16\eta\mu^2\theta - 4\eta\mu^2\theta(4+9\sigma\upsilon\nu^2\theta) = 16\eta\mu^2\theta - 16\eta\mu^2\theta - 36\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta = -36\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta < 0$

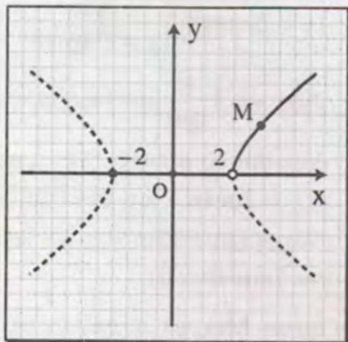
Οι ρίζες της λοιπόν είναι:

$$z_{1,2} = \frac{4\eta\mu\theta \pm \sqrt{36\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}\, i}{2\eta\mu^2\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta} \pm 3(\sigma\varphi\theta)i = x \pm yi$$

όπου τέθηκε $x = \frac{2}{\eta\mu\theta}$ και $y = 3\sigma\varphi\theta$. Άρα $M\left(\frac{2}{\eta\mu\theta}, 3\sigma\varphi\theta\right)$

Όμως είναι $1 + \sigma\varphi^2\theta = \frac{1}{\eta\mu^2\theta}$ δηλαδή $1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Οπότε παίρνουμε

τελικά $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ με $x > 0$ και $y > 0$ διότι $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



Άρα το M κινείται στην υπερβολή $c: \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ και συγκεκριμένα στο τμήμα αυτής που βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο.

ΘΕΜΑ 132

Δίνεται η εξίσωση

$$z^2 - 2\varkappa(\eta\mu\theta)z + \varkappa^2(1 + 3\sigma\upsilon\nu^2\theta) = 0,\ \varkappa > 0 \text{ και } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Έστω M η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο εκείνης της ρίζας της εξίσωσης της οποίας το φανταστικό μέρος είναι θετικό. Να δείξετε ότι

α) Αν το $\varkappa$ μεταβάλλεται και το θ είναι σταθερό τότε το M κινείται σε μία ευθεία.

β) Αν το $\varkappa$ είναι σταθερό και το θ μεταβάλλεται τότε το M κινείται σε μία έλλειψη.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς z με

$\Delta = 4\varkappa^2\eta\mu^2\theta - 4\varkappa^2(1 + 3\sigma\upsilon\nu^2\theta) = \ldots = -16\varkappa^2\sigma\upsilon\nu^2\theta < 0$

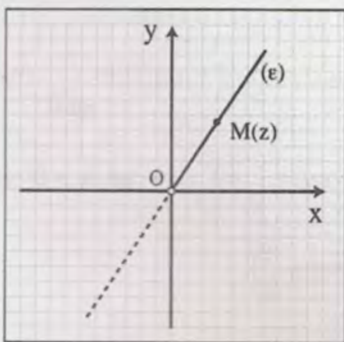
Οι ρίζες της λοιπόν είναι

$$z_{1,2} = \frac{2\varkappa\eta\mu\theta \pm 4\varkappa\sigma\upsilon\nu\theta i}{2} = \varkappa\eta\mu\theta \pm 2\varkappa\sigma\upsilon\nu\theta i.$$

Άρα η ρίζα με φανταστικό μέρος θετικός είναι η $z_1 = \kappa\eta\mu\theta + 2\kappa\sigma\upsilon\nu\theta i$

$\left(\text{διότι } \kappa > 0 \text{ και } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο. Οπότε

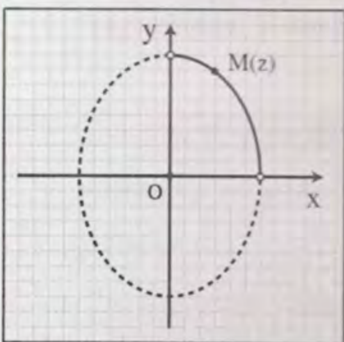


$$\begin{cases} x = \kappa\eta\mu\theta \\ y = 2\kappa\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \kappa = \dfrac{x}{\eta\mu\theta} \\ y = 2\kappa\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$$

Άρα $y = 2\dfrac{x}{\eta\mu\theta}\sigma\upsilon\nu\theta$ οπότε $y = 2\sigma\varphi\theta x$

Δηλαδή το σημείο Μ κινείται στην ευθεία ε: $y = 2\sigma\varphi\theta x$ (και συγκεκριμένα στην αντίστοιχη ημιευθεία που βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο διότι $x = \kappa\eta\mu\theta > 0$ και $y = 2\kappa\sigma\upsilon\nu\theta > 0$).

β) Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο. Οπότε



$$\begin{cases} x = \kappa\eta\mu\theta \\ y = 2\kappa\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\kappa} = \eta\mu\theta \\ \dfrac{y}{2\kappa} = \sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$$

Αλλά $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ οπότε $\dfrac{x^2}{\kappa^2} + \dfrac{y^2}{(2\kappa)^2} = 1$

Δηλαδή το σημείο Μ κινείται στην έλλειψη $c: \dfrac{x^2}{\kappa^2} + \dfrac{y^2}{(2\kappa)^2} = 1$ (και συγκεκριμένα στο τμήμα αυτής που βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο διότι $x > 0$ και $y > 0$).

ΘΕΜΑ 133

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 4e^{2t}z + (4e^{4t} + e^{2t}) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ και M_1, M_2 οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο.

α) Να δείξετε ότι τα M_1, M_2 κινούνται σε παραβολή της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β) Να βρείτε το t έτσι ώστε το τρίγωνο OM_1M_2 να είναι ορθογώνιο.

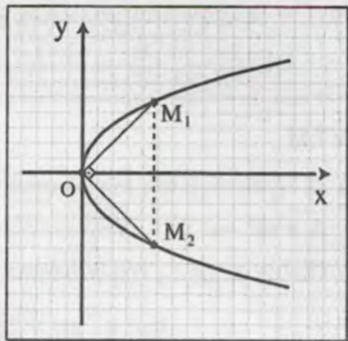
ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς z με $\Delta = (4e^{2t})^2 - 4(4^{et} + e^{2t}) = -4e^{2t} < 0$

Οι ρίζες της λοιπόν είναι:

$$z_{1,2} = \frac{4e^{2t} \pm \sqrt{4e^{2t}}\,i}{2} = 2e^{2t} \pm e^{t}i = x \pm yi$$

όπου τέθηκε $x = 2e^{2t}$ και $y = e^{t}$. Συμπεραίνουμε ότι είναι $y^2 = \frac{1}{2}x$.



Άρα τα σημεία $M_1(x, y)$ και $M_2(x, -y)$ κινούνται στην παραβολή $c: y^2 = \frac{1}{2}x$.

β) Παρατηρούμε ότι τα σημεία M_1, M_2 είναι συμμετρικά ως προς τον $x'x$. Συνεπώς το τρίγωνο OM_1M_2 είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν $\left(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \frac{\pi}{2}$ δηλαδή $x + yi = (x - yi)i \Leftrightarrow x + yi = y + xi \Leftrightarrow x = y$

Δηλαδή $2e^{2t} = e^{t} \Leftrightarrow e^{t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\ln 2$.

● **Σχόλιο.** Θα μπορούσαμε να το αντιμετωπίσουμε ως πρόβλημα διανυσματικού λογισμού

...$\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ δηλαδή $\overrightarrow{OM_1}\,\overrightarrow{OM_2} = 0$, όπου $\overrightarrow{OM_1} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$

και $\overrightarrow{OM_2} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{t} \end{bmatrix}$. Οπότε έχουμε $(2e^{2t})^2 - (e^{t})^2 = 0$ και ισοδύναμα βρίσκουμε τελικά $t = -\ln 2$.

ΘΕΜΑ 134

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - (e^{t} + e^{-t})z + \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t}) = 0$, όπου είναι $t \geq 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες z_1, z_2 των οποίων τα αντίστοιχα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο, είναι σημεία του δεξιού κλάδου της ισοσκελούς υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$. ▶

▶

β) Να δείξετε ότι για κάθε μία ρίζα z της εξίσωσης, ισχύει η σχέση

$$|z+\sqrt{2}|-|z-\sqrt{2}|=2$$

ΛΥΣΗ

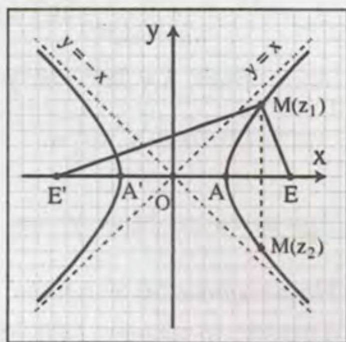
α) Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού με

$\Delta=(e^t+e^{-t})^2-2(e^{2t}+e^{-2t})=-(e^t-e^{-t})^2\le 0$

Οπότε οι ρίζες της δίνονται από τους τύπους

$$z_{1,2}=\frac{e^t+e^{-t}\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

δηλαδή $z_{1,2}=\dfrac{e^t+e^{-t}\pm i(e^t-e^{-t})}{2}=x\pm yi$



όπου τέθηκε

$x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ και $y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$. Συμπεραίνουμε ότι είναι

$x^2-y^2=\frac{1}{4}(e^t+e^{-t})^2-\frac{1}{4}(e^t-e^{-t})^2=1$

Άρα λοιπόν τα σημεία των μιγάδων $z_1=x+yi$ και $z_2=x-yi$ είναι σημεία της ισοσκελούς υπερβολής $x^2-y^2=1$ και μάλιστα του δεξιού κλάδου της αφού είναι $x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})>0$. Είναι επίσης $y\ge 0$, αφού $t\ge 0$ άρα η εικόνα της z_1 βρίσκεται στο άνω και η εικόνα της z_2 στο κάτω ημιεπίπεδο.

β) Είναι $\gamma^2=1+1=2$. Οι εστίες Ε, Ε΄ αντιστοιχούν στους αριθμούς $\sqrt{2}+0i=\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}+0i=-\sqrt{2}$. Για τα σημεία Μ(z), ($z=z_1$ ή z_2) θα είναι λοιπόν (ΜΕ΄) − (ΜΕ) = 2 δηλαδή $|z+\sqrt{2}|-|z-\sqrt{2}|=2$.

ΘΕΜΑ 135

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει αριθμός $z\in\mathbb{C}$ για τον οποίο να ισχύουν οι δύο σχέσεις $z^{2\nu}=-7+24i$ και $|z^\nu+4-3i|=\sqrt{55}$ για κάποιο $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $z^\nu=x+yi$ οπότε $z^{2\nu}=x^2-y^2+2xyi$. Η πρώτη από τις δύο συνθήκες του προβλήματος ικανοποιείται τότε και μόνο, όταν είναι

$x^2 - y^2 = -7$ και $2xy = 24$.
Τότε όμως είναι και
$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 59 + 576 = 625$
δηλαδή $(x^2 + y^2)^2 = 625$, οπότε $x^2 + y^2 = 25$.
Βρίσκουμε $2x^2 = 18$, $2y^2 = 32$, οπότε $x^2 = 9$, $y^2 = 16$. Είναι επίσης $xy = 12 > 0$ οπότε έχουμε $x + yi = 3 + 4i$ είτε $x + yi = -(3 + 4i)$. Στην πρώτη περίπτωση βρίσκουμε $z^ν + 4 - 3i = 7 + i$, ενώ στη δεύτερη $z^ν + 4 - 3i = 1 - 71$. Το μέτρο $|z^ν+4-3i|$ είναι και στις δύο περιπτώσεις αυτές ίσο με $\sqrt{1+49} = \sqrt{50} \neq \sqrt{55}$.

● Ο αριθμός $z^ν$ που παρουσιάζεται στη δεύτερη συνθήκη είναι τετραγωνική ρίζα του αριθμού $z^{2ν} = -7 + 24i$, άρα μπορεί λοιπόν να βρεθούν οι δυνατές τιμές του.

Οι δύο συνθήκες του προβλήματος είναι λοιπόν ασυμβίβαστες μεταξύ τους.

ΘΕΜΑ 136

Να δείξετε ότι αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 είναι $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$ και $z_1 + ωz_2 + ω^2z_3 \neq 0$ όπου ω μία μη πραγματική κυβική ρίζα του 1, θα έχουμε τότε $z_1 + ω^2z_2 + ωz_3 = 0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $(z_1 + ωz_2 + ω^2z_3)(z_1 + ω^2z_2 + ωz_3) =$
$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_1z_2(ω + ω^2) + z_1z_3(ω + ω^2) + z_2z_3(ω^2 + ω^4)$.
Είναι όμως $ω^3 = 1$ και $ω + ω^2 + 1 = 0$, οπότε $ω + ω^2 = ω^2 + ω^4 = -1$ και βρίσκουμε $(z_1 + ωz_2 + ω^2z_3)(z_1 + ω^2z_2 + ωz_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1$
και τελικά $(z_1 + ωz_2 + ω^2z_3)(z1 + ω^2z_2 + ωz_3) =$
$$= \frac{1}{2}\left[(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2\right] = 0.$$

ΘΕΜΑ 137

ii) Αν $z = συνθ + iημθ$ να δείξετε ότι $συν(νθ) = \frac{z^{2ν} + 1}{2z^ν}$, $ν \in \mathbb{N}^*$.

ii) Αν $z = συν\frac{2π}{5} + iημ\frac{2π}{5}$ να δείξετε ότι ο $\frac{z+1}{z^3}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός του διαστήματος $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $συν\frac{π}{5} + συν\frac{2π}{5} + συν\frac{4π}{5} + συν\frac{6π}{5} = -\frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

i) Εχουμε $\dfrac{z^{2\nu}+1}{2z^{\nu}}=\dfrac{1}{2}\left(z^{\nu}+\dfrac{1}{z^{\nu}}\right)$.

Είναι όμως $z^{\nu}=(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)^{\nu}=\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\eta\mu(\nu\theta)$

και $\dfrac{1}{z^{\nu}}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\eta\mu(\nu\theta)}=\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)-i\eta\mu(\nu\theta)$

Άρα $\dfrac{z^{2\nu}+1}{2z^{\nu}}=\dfrac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\eta\mu(\nu\theta)+\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)-i\eta\mu(\nu\theta))=\dfrac{1}{2}2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)=\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)$

ii) Εχουμε $\dfrac{z+1}{z^3}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{5}+i\eta\mu\dfrac{2\pi}{5}+1}{\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{5}+i\eta\mu\dfrac{2\pi}{5}\right)^3}=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\pi}{5}-1+i2\eta\mu\dfrac{\pi}{5}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}+1}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{6\pi}{5}+i\eta\mu\dfrac{6\pi}{5}}=$

$$=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}+i\eta\mu\dfrac{\pi}{5}\right)}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{6\pi}{5}+i\eta\mu\dfrac{6\pi}{5}}=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}[\sigma\upsilon\nu(-\pi)+i\eta\mu(-\pi)]=-2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}\in\mathbb{R}.$$

Όμως η συνάρτηση συνx είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Επομένως

$\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}<\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}<\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}$ οπότε $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $-\sqrt{3}<-2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}<-\sqrt{2}$

Δηλαδή $\dfrac{z+1}{z^3}\in(-\sqrt{3},-\sqrt{2})$. Επίσης

$$\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{6\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{z+1}{z^3}+\dfrac{z^2+1}{2z}+\dfrac{z^4+1}{2z^2}+\dfrac{z^6+1}{2z^3}=$$

$$=\dfrac{-z-1+z^4+z^2+z^5+z+z^6+1}{2z^3}=\dfrac{z^2+z^4+z^5+z^6}{2z^3}=\dfrac{1+z^2+z^3+z^4}{2z}=$$

$$=\dfrac{(1+z+z^2+z^3+z^4)-z}{2z}=\dfrac{\dfrac{z^5-1}{z-1}-z}{2z}=\dfrac{\dfrac{1-1}{z-1}-z}{2z}=\dfrac{-z}{2z}=-\dfrac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 138

Να λύσετε την εξίσωση $z^5-32i=0$ και στη συνέχεια να εκφράσετε το πολυώνυμο $P(z)=z^4+2iz^3-4z^2-8iz+16$ ως γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων.

ΛΥΣΗ

Εχουμε $z^5 - 32i = 0 \Leftrightarrow z^5 = 32\left(συν\dfrac{\pi}{2} + iημ\dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

Οι ρίζες της (1) είναι: $z_κ = \sqrt[5]{32}\left[συν\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+2κ\pi}{5}\right) + iημ\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+2κ\pi}{5}\right)\right]$, $κ = 0,1,2,3,4$

Δηλαδή: $z_0 = 2\left(συν\dfrac{\pi}{10} + iημ\dfrac{\pi}{10}\right)$

$z_1 = 2\left(συν\dfrac{\pi}{2} + iημ\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i$

$z_2 = 2\left(συν\dfrac{9\pi}{10} + iημ\dfrac{9\pi}{10}\right) = 2\left(-συν\dfrac{\pi}{10} + iημ\dfrac{\pi}{10}\right) = -\overline{z_0}$

$z_3 = 2\left(συν\dfrac{13\pi}{10} + iημ\dfrac{13\pi}{10}\right) = 2\left(-συν\dfrac{3\pi}{10} - iημ\dfrac{3\pi}{10}\right)$

$z_4 = 2\left(συν\dfrac{17\pi}{10} + iημ\dfrac{17\pi}{10}\right) = 2\left(συν\dfrac{3\pi}{10} - iημ\dfrac{3\pi}{10}\right) = -\overline{z_3}$

Είναι επίσης $z^5 - 32i = z^5 - (2i)^5 = (z-2i)\,[z^4 + z^3(2i) + z^2(2i)^2 + z(2i)^3 + (2i)^4] =$

$= (z-2i)\,(z^4 + 2iz^3 - 4z^2 - 8iz + 16)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

και $z^5 - 32i = (z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) =$

$= (z-2i)(z-z_0)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$, $z \in \mathbb{C}$

Άρα οι ρίζες του πολυωνύμου $z^4 + 2iz^3 - 4z^2 - 8iz + 16$ είναι οι αριθμοί z_0, z_2, z_3, z_4. Οπότε για κάθε $z \in \mathbb{C}$ είναι:

$z^4 + 2iz^3 - 4z^2 - 8iz + 16 = (z-z_0)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) =$

$= [(z-z_0)(z-z_2)]\,[(z-z_3)(z-z_4)] = [(z-z_0)(z+\overline{z}_0)]\,[(z-z_3)(z+\overline{z}_3)] =$

$= [z^2 - (z_0 - \overline{z}_0)z - z_0\overline{z}_0]\,[z^2 - (z_3 - \overline{z}_3)z - z_3\overline{z}_3] =$

$= \left(z^2 - 4iημ\dfrac{\pi}{10}z - 4\right)\left(z^2 - 4iημ\dfrac{3\pi}{10}z - 4\right)$.

ΘΕΜΑ 139

Έστω $z_0, z_1, ..., z_{ν-1}$ οι νιοστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $α$ και $A_0, A_1, ... A_{ν-1}$ τα αντίστοιχα σημεία τούτων στο μιγαδικό επίπεδο.

α) Αν Μ το αντίστοιχο σημείο του μιγαδικού αριθμού w, να δείξετε ότι θα είναι $(MA_0)(MA_1)...(MA_{ν-1}) = |w^ν - α|$

β) Αν είναι $|w| = |α| = 1$, να δείξετε ότι θα είναι και $(MA_1)(MA_2)...(MA_{ν-1}) \leq ν$.

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $z_0, z_1, z_2, \dots z_{\nu-1}$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z) = z^\nu - \alpha$ και κατά τα γνωστά έχουμε $P(z) = z^\nu - \alpha = (z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_{\nu-1}),\ \forall\ z \in \mathbb{C}$
Οπότε
$P(w) = w^\nu - \alpha = (w-z_0)(w-z_1)\dots(w-z_{\nu-1})$,

● Με τη βοήθεια των νιοστών ριζών ενός μιγαδικού α παραγοντοποιείται το πολυώνυμο $P(z) = z^\nu - \alpha$.

Είναι επίσης $(MA_0) = |w - z_0|$, $(MA_1) = |w - z_1|, \dots, (MA_{\nu-1}) = |w - z_{\nu-1}|$
και τελικά $(MA_0)(MA_1)\dots(MA_{\nu-1}) = |(w - z_0)(w - z_1)\dots(w - z_{\nu-1})| =$
$= |w^\nu - \alpha|$ (1)

α) Έστω ότι είναι $|w| = |\alpha| = 1$. Είναι $z_0^\nu = \alpha$, άρα λοιπόν $P(z) = (z - z_0)(z^{\nu-1} + z_0 z^{\nu-2} + \dots + z_0^{\nu-1})$
Το πολυώνυμο $\varphi(z) = z^{\nu-1} + z_0 z^{\nu-2} + \dots + z_0^{\nu-1}$ έχει λοιπόν ρίζες τις $z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}$ και έχουμε
$\varphi(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_{\nu-1})\ \ \forall\ z \in \mathbb{C}$

● Το πολυώνυμο $\varphi(z) = z^{\nu-1} + z_0 z^{\nu-2} + \dots + z_0^{\nu-1}$ έχει ρίζες όλες τις υπόλοιπες ρίζες $z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}$ πλην της ρίζας z_0.

οπότε $\varphi(w) = (w - z_1)(w - z_2)\dots(w - z_{\nu-1})$. Θα είναι λοιπόν
$(MA_1)(MA_2)\dots(MA_{\nu-1}) = |\varphi(z)| \le |w|^{\nu-1} + |z_0|\,|w|^{\nu-2} + \dots + |z_0|^{\nu-1} = \nu$ (2) και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

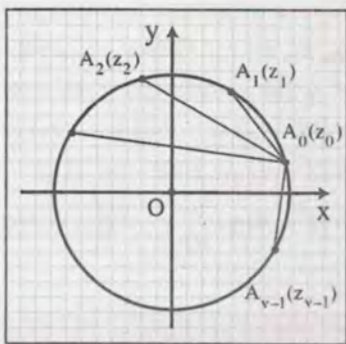
● **Παρατήρηση**

Από τη σχέση $\varphi(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_{\nu-1})$ προκύπτει ότι είναι $(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)\dots(z_0 - z_{\nu-1}) =$
$= \varphi(z_0) = \nu z_0^{\nu-1}$.

Όμως $|z_0|^\nu = |\alpha|$ και $|z_0| = \sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

Βρίσκουμε λοιπόν ότι είναι και

$(A_0A_1)(A_0A_2)\dots(A_0A_{\nu-1}) = \nu\sqrt[\nu]{|\alpha|^{\nu-1}}$ πράγμα που σημαίνει ότι αν $|\alpha| = 1$ και $w = z_0$ η (2) ισχύει σαν ισότητα.



ΘΕΜΑ 140

Έστω $1, z_1, z_2, \dots z_{\nu-1}$ οι νιοστές ρίζες του 1 και $z \in \mathbb{C}$ οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός.
Να δείξετε ότι θα είναι

$$(z + z_1)(z + z_2)\dots(z + z_{\nu-1}) = z^{\nu-1} - z^{\nu-2} + z^{\nu-3} - \dots + (-1)^{\nu-1}$$

ΛΥΣΗ

Οι αριθμοί $1, z_1, z_2, \ldots z_{\nu-1}$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z) = z^\nu - 1 = (z-1)(z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ldots + z + 1)$ και οι αριθμοί $z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$ οι ρίζες του πολυωνύμου $\varphi(z) = z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ldots + z + 1$

Θα είναι λοιπόν

$$z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ldots + z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{\nu-1}), \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Με αντικατάσταση του z με $-z$, βρίσκουμε

$$(-1)^{\nu-1}z^{\nu-1} + (-1)^{\nu-2}z^{\nu-2} + \ldots + (-1)z + 1 = (-z - z_1)(-z - z_2)\ldots(-z - z_{\nu-1})$$

οπότε και

$$(-1)^{\nu-1}z^{\nu-1} - (-1)^{\nu-1}z^{\nu-2} + (-1)^{\nu-1}z^{\nu-3} - \ldots + (-1)^{\nu-1}(-1)^{\nu-1} =$$
$$= (-1)^{\nu-1}(z + z_1)(z + z_2)\ldots(z + z_{\nu-1})$$

και τελικά

$$z^{\nu-1} - z^{\nu-2} + z^{\nu-3} - \ldots + (-1)^{\nu-1} = (z + z_1)(z + z_2)\ldots(z + z_{\nu-1}).$$

ΘΕΜΑ 141

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \to 0} \frac{\alpha ημx + \beta|x|}{x^2 + x} = 2 - \alpha$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $f(x) = \frac{\alpha ημx + \beta|x|}{x^2 + x}$. Για να υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$ θα πρέπει

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 - \alpha$ και εφόσον $|x| = -x$ αν $x < 0$ και $|x| = x$ αν $x > 0$,

θα έχουμε $\lim_{x \to 0^-} \frac{\alpha ημx - \beta x}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha ημx + \beta x}{x^2 + x} = 2 - \alpha$ η οποία γίνεται

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\alpha \frac{ημx}{x} - \beta}{x + 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha \frac{ημx}{x} + \beta}{x + 1} = 2 - \alpha$$ και επειδή $\lim_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = 1$

θα προκύψει $\frac{\alpha - \beta}{1} = \frac{\alpha + \beta}{1} = 2 - \alpha$. Από τη σχέση αυτή παίρνουμε

$\alpha - \beta = \alpha + \beta$ και κατά συνέπεια $\boldsymbol{\beta = 0}$ και $\alpha - \beta = 2 - \alpha$ που για $\beta = 0$ γίνεται $\alpha = 2 - \alpha$ οπότε $\boldsymbol{\alpha = 1}$.

ΘΕΜΑ 142

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ώστε $\lim_{x \to \alpha} \frac{x^2 + 2\beta x + \beta^2}{x^2 - \alpha^2} = \alpha + 1$ (1).

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $f(x) = \frac{x^2 + 2\beta x + \beta^2}{x^2 - \alpha^2}$, $x \neq \pm \alpha$ από την οποία προκύπτει

$x^2 + 2\beta x + \beta^2 = (x^2 - \alpha^2)f(x)$ και $\lim_{x \to \alpha}\left(x^2 + 2\beta x + \beta^2\right) = \lim_{x \to \alpha}(x^2 - \alpha^2)\lim_{x \to \alpha} f(x)$

ισοδύναμα $\alpha^2 + 2\beta\alpha + \beta^2 = 0(\alpha + 1)$ άρα $(\alpha + \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$ (2). Τότε η (1)

γίνεται $\lim_{x \to \alpha} \frac{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}{x^2 - \alpha^2} = \alpha + 1$ και $\lim_{x \to \alpha} \frac{(x-\alpha)^2}{(x-\alpha)(x+\alpha)} = \alpha + 1$ ή $\lim_{x \to \alpha} \frac{x-\alpha}{x+\alpha} = \alpha + 1$

από την οποία παίρνουμε $0 = \alpha + 1$ άρα $\boldsymbol{\alpha = -1}$. Αντικαθιστώντας στη (2) βρίσκουμε $\boldsymbol{\beta = 1}$.

ΘΕΜΑ 143

√ **Αν για τις συναρτήσεις f, g: IR → IR ισχύουν:**

$$xf(x) - 4g(x) = 4 \quad (1) \quad \text{και} \quad f(x) + (x-4)g(x) = x \quad (2), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

να βρείτε εφόσον υπάρουν τα όρια

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2} g(x)$$

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με το $x-4$ και τη (2) με το 4 προκύπτει

$x(x-4)f(x) - 4(x-4)g(x) = 4(x-4)$

$4f(x) + 4(x-4)g(x) = 4x$

Προσθέτοντας αυτές κατά μέλη έχουμε: $(x^2-4x+4)f(x) = 8(x-2)$ και ισοδύναμα $(x-2)^2 f(x) = 8(x-2)$ οπότε για $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{8}{x-2}$. Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

Πολλαπλασιάζοντας τη (2) με το $-x$ έχουμε $-xf(x) - x(x-4)g(x) = -x^2$ και προσθέτοντας την προκύπτουσα στην (1) βρίσκουμε $-(x(x-4)+4)g(x) = -x^2+4$ ή $(x^2-4x+4)g(x) = x^2-4$ οπότε για $x \neq 2$, $g(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-2)^2} = \dfrac{x+2}{x-2}$.

Αλλά $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$. Συνεπώς **δεν υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

ΘΕΜΑ 144

√ **Αν για τις συναρτήσεις f, g: IR → IR ισχύουν:**

$$\lim_{x\to 2}[f(x) - xg(x)] = -1 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2}[(x-4)f(x) + 3g(x)] = 3 \quad (2)$$

να βρείτε, εφόσον υπάρουν, τα όρια $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **και** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $A(x) = f(x) - xg(x)$ (α) και $B(x) = (x-4)f(x) + 3g(x)$ (β). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με $-(x-4)$ προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} -(x-4)A(x) &= -(x-4)f(x) + x(x-4)g(x) \\ \text{και} \quad B(x) &= (x-4)f(x) + 3g(x) \end{aligned}\right\}$$

. Προκύπτει προσθέτοντας κατά μέλη $(x^2-4x+3)g(x) = B(x) - (x-4)A(x)$ και για $x \neq 1, 3$ θα έχουμε

$g(x)=\dfrac{B(x)-(x-4)A(x)}{x^2-4x+3}$. Από (1) και (2) όμως $\lim\limits_{x\to 2}A(x)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 2}B(x)=3$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\dfrac{3+2(-1)}{4-8+3}=\dfrac{1}{-1}=-1$ δηλαδή $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2}g(x)=-1}$.

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (α) με το 3 και την (β) με το x έχουμε $3A(x)=3f(x)-3xg(x)$ και $xB(x)=x(x-4)f(x)+3xg(x)$, από τις οποίες προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $(x^2-4x+3)f(x)=3A(x)+xB(x)$ και για $x\neq 1,3$ θα είναι $f(x)=\dfrac{3A(x)+xB(x)}{x^2-4x+3}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\dfrac{3(-1)+2\cdot 3}{-1}=-3$ δηλαδή $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-3}$.

ΘΕΜΑ 145



Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x-\dfrac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}}{x^2\eta\mu x}$.

ΛΥΣΗ

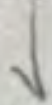
Αν $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x-\dfrac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}}{x^2\eta\mu x}$ αυτή γράφεται

$$f(x)=\frac{\eta\mu 2x(\sigma\upsilon\nu 2x-1)}{x^2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(1-2\eta\mu^2 x-1)}{x^2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{-4\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}{x^2\sigma\upsilon\nu 2x}=$$

$$=\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\frac{-4\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu 2x}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1^2\dfrac{-4}{1}=-4$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

ΘΕΜΑ 146



Δίνεται αυστηρά αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\mathbf{f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)\quad \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad (1)}$$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $f(\alpha^2+\beta-1)+f(\alpha^2-\beta+1)=2f(4(\alpha-1))$ (ε_1)

ΛΥΣΗ

Στην (1) για $\alpha=\beta=0$ έχουμε $f(0)=f^2(0) \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)=1$.

Αν $f(0)=0$ τότε $f(x)=f(x+0)=f(x)\,f(0)=0$ δηλ. $f(x)$ σταθερή, άτοπο εφόσον η f είναι αυστηρά αύξουσα, άρα $\boxed{f(0)=1}$

Επίσης έχουμε $f(0)=f(x-x)=f(x)\,f(-x)$, άρα $f(x)\,f(-x)=1$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι $f(x)\neq 0$ (2) και $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ (3) $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Για $\alpha=\beta=\dfrac{x}{2}$ η (1) γίνεται $f(x)=f^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\geq 0$ αλλά $f\left(\dfrac{x}{2}\right)\neq 0$ από την (2) οπότε $f(x)>0$ $\forall\, x\in \mathbb{R}$ (4).

Η εξίσωση (ε_1) γίνεται: $f(\alpha^2)\,f(\beta-1)+f(\alpha^2)\,f(1-\beta)=2f(4\alpha-4) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\alpha^2)[f(\beta-1)+f(1-\beta)]=2f(4\alpha-4) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{f(\alpha^2)}{f(4\alpha-4)}\left[f(\beta-1)+\frac{1}{f(\beta-1)}\right]=2$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2)\,f(4-4\alpha)\left[f(\beta-1)+\frac{1}{f(\beta-1)}\right]=2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2-4\alpha+4)\left[f(\beta-1)+\frac{1}{f(\beta-1)}\right]=2 \Leftrightarrow f((\alpha-2)^2)\left[f(\beta-1)+\frac{1}{f(\beta-1)}\right]=2 \quad (\varepsilon_2)$$

Για $\alpha=2$ έχουμε $f(0)\left[f(\beta-1)+\dfrac{1}{f(\beta-1)}\right]=2 \Leftrightarrow f^2(\beta-1)+1=2f(\beta-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [f(\beta-1)-1]^2=0 \Leftrightarrow f(\beta-1)=1$ και εφόσον είναι αυστηρά αύξουσα (άρα και 1 – 1) θα είναι $\beta-1=0 \Leftrightarrow \beta=1$. Άρα μία λύση η $(\alpha,\beta)=(2,1)$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

Έστω $\alpha\neq 2$ τότε $(\alpha-2)^2>0$ οπότε και $f((\alpha-2)^2)>f(0)=1$ οπότε από την εξίσωση (ε_2) που είναι ισοδύναμη με την (ε_1) θα έχουμε

$f(\beta-1)+\dfrac{1}{f(\beta-1)}<2 \Leftrightarrow f^2(\beta-1)-2f(\beta-1)+1<0 \Leftrightarrow (f(\beta-1)-1)^2<0$ που

είναι άτοπο. Άρα $\alpha=2$ και $\beta=1$ μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ 147

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{1}{2}e^x(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **για την οποια ισχύει**

$$f'(x)+f(x)=\eta\mu x \quad (1), \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$



▶

και επιπλέον η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο τομής της με τον άξονα y'y σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο εμβαδού 1/2.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \frac{1}{2} e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + \frac{1}{2} e^x(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)$ δηλαδή

$g'(x) = \frac{1}{2} e^x 2\eta\mu x = e^x \eta\mu x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

ii) Πολλαπλασιάζοντας την (1) με e^x παίρνουμε ισοδύναμα

$f'(x)e^x + f(x)e^x = e^x\eta\mu x$ και $f'(x)e^x + f(x)(e^x)' = e^x\eta\mu x$ ή $[f(x)e^x]' = e^x\eta\mu x$.

Αλλά από το (i) ερώτημα $g'(x) = e^x\eta\mu x$ οπότε έχουμε $[f(x)e^x]' = g'(x)$.

Συνεπώς οι συναρτήσεις $f(x)e^x$ και $g(x)$ διαφέρουν κατά σταθερή ποσότητα δηλαδή $f(x)e^x = g(x) + c$ (2).

Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης στο σημείο τομής με τον $y'y$ δηλαδή στο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση: $y - f(0) = f'(0)\,(x - 0)$ ισοδύναμα

$y = f'(0)x + f(0)$ η οποία τέμνει τους άξονες στα $(0, f(0))$ και $\left(-\frac{f(0)}{f'(0)}, 0\right)$

και κατά συνέπεια το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες

$\varepsilon = \frac{1}{2} f(0)\left[-\frac{f(0)}{f'(0)}\right] = -\frac{f^2(0)}{2f'(0)}$, αλλά $\varepsilon = \frac{1}{2}$ άρα $-\frac{f^2(0)}{f'(0)} = 1$ (3).

Από την (1) όμως για $x = 0$ παίρνουμε $f'(0) = -f(0)$ οπότε η (3) γίνεται

$-\frac{f^2(0)}{-f(0)} = 1$ άρα $\mathbf{f(0) = 1}$. Θέτοντας στην (2) $x = 0$ έχουμε $f(0)e^0 = g(0) + c$,

αλλά $g(0) = -\frac{1}{2}$ οπότε $c = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ και έτσι συμπεραίνουμε ότι

$f(x)e^x = g(x) + \frac{3}{2}$ ή $f(x)e^x = \frac{1}{2} e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + \frac{3}{2}$ οπότε προκύπτει ότι

$f(x) = \frac{1}{2}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 3e^{-x})$.

ΘΕΜΑ 148

Έστω A πίνακας νxν, τέτοιος ώστε ο A − I να είναι αντιστρέψιμος. Να δείξετε ότι η εξίσωση ▶



$$\frac{|A - xI|}{x - 1} + \frac{|A + xI|}{x + 1} = 0 \quad (E)$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα (–1, 1).

ΛΥΣΗ

Για τις ενδεχόμενες λύσεις x της (E) στο ανοικτό διάστημα (–1, 1) είναι $x - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, και οι λύσεις αυτές είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες λύσεις της εξίσωσης $(x + 1)\,|A - xI| + (x - 1)\,|A + xI| = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = (x + 1)\,|A - xI| + (x - 1)\,|A + xI| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχουμε

$$f(-1) = -2|A - I| \text{ και } f(1) = 2|A - I|$$

Όμως $|A - I| \neq 0$, αφού ο $A - I$ είναι αντιστρέψιμος.

Άρα λοιπόν $f(-1)f(1) = -4|A - I|^2 > 0$ και (Θ. Bolzano) υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ με $f(x_0) = 0$ τότε $(x_0 + 1)\,|A - x_0I| + (x_0 - 1)\,|A + x_0I| = 0$ και $x_0 \neq \pm 1$.

Διαιρώντας με $(x_0 + 1)(x_0 - 1)$ βρίσκουμε

$$\frac{|A - x_0I|}{x_0 - 1} + \frac{|A + x_0I|}{x_0 + 1} = 0.$$

ΘΕΜΑ 149

Έστω f συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] (α < β) και τέτοια ώστε να είναι f(α) = β και f(β) = α.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ ∈ (α, β), τέτοιο ώστε να είναι f'(ξ) = –1 (1).

ΛΥΣΗ

> Η συνθήκη (1) γράφεται $f'(\xi) + 1 = 0$. Θα ζητήσουμε συνάρτηση φ, με παράγωγο $f'(x) + 1$ και τέτοια ώστε να είναι
>
> $$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta).$$
>
> Τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση φ, με τύπο
>
> $$\varphi(x) = f(x) + x - \alpha - \beta$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\varphi(x) = f(x) + x - \alpha - \beta \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και έχουμε

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) + \alpha - \alpha - \beta = 0 \text{ και } \varphi(\beta) = f(\beta) + \beta - \alpha - \beta = 0$$

Η φ ικανοποιεί λοιπόν τις συνθήκες Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε να είναι $\varphi'(\xi) = f'(\xi) + 1 = 0$

οπότε για το σημείο ξ αυτό, θα έχουμε $f'(\xi) = -1$.

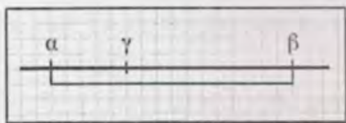
ΘΕΜΑ 150

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ $(\alpha < \beta)$ συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta)$ και δεδομένος θετικός αριθμός ϱ.

Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_1) + \varrho f'(x_2) = 0$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε σημείο γ του $[\alpha, \beta]$, με $\beta - \gamma = \varrho(\gamma - \alpha)$ δηλαδή με $(\varrho + 1)\gamma = \alpha\varrho + \beta$ και $\gamma = \dfrac{\alpha\varrho + \beta}{\varrho + 1}$ και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του Lagrange σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$.



Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $x_2 \in (\gamma, \beta)$ ώστε να είναι $f(\gamma) - f(\alpha) = (\gamma - \alpha)f'(x_1)$ και $f(\beta) - f(\gamma) = (\beta - \gamma)f'(x_2) = \varrho(\gamma - \alpha)f'(x_2)$.

Προσθέτοντας κατά μέλη (και επειδή $f(\alpha) = f(\beta)$) παίρνουμε

$0 = (\gamma - \alpha)f'(x_1) + (\gamma - \alpha)\varrho f'(x_2)$ και τελικά $f'(x_1) + \varrho f'(x_2) = 0$.

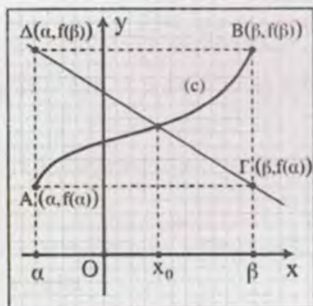
ΘΕΜΑ 151

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 διαφορετικά τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \left(\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\right)^2$$

ΛΥΣΗ

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$. Σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΓΒΔ με τις πλευρές παράλληλες στους άξονες. Η ευθεία ΔΓ τέμνει τουλάχιστον σ' ένα σημείο την c. Έτσι σκεφτόμαστε να πάρουμε ως βοηθητική συνάρτηση τη διαφορά των συναρτήσεων που έχουν γραφικές παραστάσεις την c και την ΔΓ αντίστοιχα.

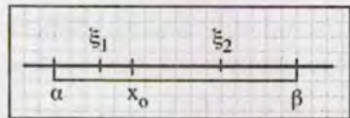


Η εξίσωση της ΔΓ είναι: $\frac{y-f(\beta)}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\beta-\alpha}$ ισοδύναμα

$y=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\beta)$. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$\Phi(x)=f(x)-\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)-f(\beta)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με

$\Phi(\alpha)=f(\alpha)-f(\beta)$ και $\Phi(\beta)=f(\beta)-f(\alpha)$ και εφόσον $f(\alpha)\neq f(\beta)$ η Φ παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα και κατά συνέπεια υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0)=0$, ισοδύναμα



$f(x_0)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\beta-\alpha}(x_0-\alpha)+f(\beta)$. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ αντίστοιχα, άρα

$\exists\ \xi_1,\xi_2$ με $\xi_1\in(\alpha,x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,\beta)$, οπότε $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=\frac{\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\beta-\alpha}(x_0-\alpha)+f(\beta)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\beta-\alpha}+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=$$

$$=\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)\frac{\alpha-x_0+\beta-\alpha}{(\beta-\alpha)(x_0-\alpha)}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ \frac{\beta-x_0}{x_0-\alpha}$$ και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=\frac{f(\beta)-\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\beta-\alpha}(x_0-\alpha)-f(\beta)}{\beta-x_0}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ \frac{x_0-\alpha}{\beta-x_0}$$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας έχουμε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right)^2$.

ΘΕΜΑ 152

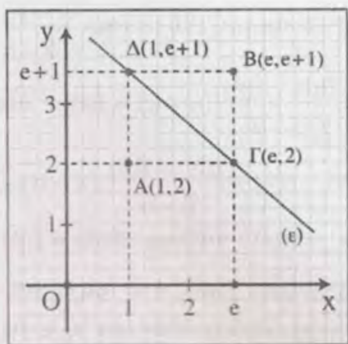
Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $[1,e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ με $f(1)=2$ και $f(e)=e+1$ ν.δ.ο. υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ διαφορετικά, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

ΛΥΣΗ

Σκεπτόμενοι όπως στο πρόβλημα (151) βρίσκουμε την ευθεία που διέρχεται από τα $\Gamma(e,2)$ και $\Delta(1,e+1)$

$$\frac{y-2}{x-e}=\frac{e+1-2}{1-e}\Leftrightarrow y=-x+e+2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) + x - e - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, e]$ και $\Phi(1) = 1-e$, $\Phi(2) = e - 1$, παίρνει δηλαδή ετερόσημες τιμές στα άκρα και συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0) = 0$ ισοδύναμα $f(x_0) = -x_0 + e + 2$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $[1, x_0]$ και $[x_0, e]$, υπάρχουν ξ_1, ξ_2 αντίστοιχα και συνεπώς διαφορετικά, τέτοια ώστε



$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{-x_0 + e + 2 - 2}{x_0 - 1} = \frac{e - x_0}{x_0 - 1} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f(x_0)}{e - x_0} = \frac{e + 1 + x_0 - e - 2}{e - x_0} = \frac{x_0 - 1}{e - x_0} \text{ οπότε } f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1.$$

ΘΕΜΑ 153

Εάν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) \le \lambda x + \beta \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } f(x_0) = \lambda x_0 + \beta \quad (2)$$

ν.δ.ο. η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f (C_f) στο $(x_0, f(x_0))$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) - \lambda x - \beta \le 0$ από την (1) η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο x_0.
$\Phi(x_0) = f(x_0) - \lambda x_0 - \beta = 0$ από την (2) οπότε έχουμε $\Phi(x) \le \Phi(x_0) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η Φ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 το $\Phi(x_0) = 0$. Συνεπώς από το θ. Fermat $\Phi'(x_0) = 0$. Αλλά $\Phi'(x) = f'(x) - \lambda$ άρα $\Phi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \lambda = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \lambda$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η οποία γίνεται $y - (\lambda x_0 + \beta) = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y = \lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 + \beta \Leftrightarrow y = \lambda x + \beta$.
Άρα η $y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτόμενη της F στο $(x_0, f(x_0))$.

ΘΕΜΑ 154

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στο $(\xi_1, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $M(\xi + 1, 0)$.

ΛΥΣΗ

Η εφαπτόμενη στο $(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ η οποία απαιτούμε να διέρχεται από το $(\xi + 1, 0)$ οπότε $0 - f(\xi) = f'(\xi)(\xi + 1 - \xi) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi) = 0$. Απαιτούμε λοιπόν η εξίσωση $f'(x) + f(x) = 0$ να έχει λύση στο $[\alpha, \beta]$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $f'(x)e^x + (e^x)'f(x) = 0$ και την $(f(x)e^x)' = 0$. Συνεπώς αρκεί να εφαρμόζεται το θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ για την $\Phi(x) = f(x)e^x$.
Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ άρα και συνεχής σ' αυτό με $\Phi(\alpha) = f(\alpha)e^\alpha = 0$ και $\Phi(\beta) = f(\beta)e^\beta = 0$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\Phi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)e^\xi + e^\xi f(\xi) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$ και επειδή η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(\xi, f(\xi))$ είναι $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ θα έχουμε $y = f(\xi) - f(\xi)(x - \xi)$. Το $M(\xi + 1, 0)$ επαληθεύει αυτήν διότι $f(\xi) - f(\xi)(\xi + 1 - \xi) = 0$.

Συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη σ' αυτό να διέρχεται από το σημείο $M(\xi + 1, 0)$.

ΘΕΜΑ 155

√ **Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(1) = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στο $(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $(2\gamma, 0)$ και να σχηματίζει εμβαδό με τους άξονες ίσο με $2\gamma|f(\gamma)|$.**

ΛΥΣΗ

Η εφαπτομένη στο $(\gamma, f(\gamma))$ έχει εξίσωση: $y - f(\gamma) = f'(\gamma)(x - \gamma)$. Για να διέρχεται από το σημείο $(2\gamma, 0)$ πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωσή της δηλ. $0 - f(\gamma) = f'(\gamma)(2\gamma - \gamma) \Leftrightarrow f(\gamma) = -\gamma f'(\gamma)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$ το οποίο επαληθεύει την εξίσωση

$$f(x) = -xf'(x) \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 0 \Leftrightarrow (xf(x))' = 0$$

Αλλά για να μηδενίζεται η παράγωγός της $\Phi(x) = xf(x)$ σε κάποιο $\gamma \in (0, 1)$ αρκεί να εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[0, 1]$ για την Φ.
Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ άρα και συνεχής και $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ. Rollle άρα υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$: $\Phi'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(\gamma) + \gamma f'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f'(\gamma) = -\frac{f(\gamma)}{\gamma}$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(\gamma, f(\gamma))$ είναι: $y - f(\gamma) = f'(\gamma)(x - \gamma)$ και γίνεται $y = -\frac{f(\gamma)}{\gamma}(x - \gamma) + f(\gamma)$ ή $y = -\frac{f(\gamma)}{\gamma}x + 2f(\gamma)$ οπότε για $x = 2\gamma$ έχουμε

$y=0$ δηλ. υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στο $(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $(2\gamma, 0)$. Η εφαπτόμενη αυτή τέμνει τον $y'y$ στο $(0, 2f(\gamma))$ και τον $x'x$ στο $(2\gamma, 0)$ άρα το εμβαδό που σχηματίζει με τους άξονες είναι

$\varepsilon = \frac{1}{2}|2f(\gamma)||2\gamma| = 2\gamma|f(\gamma)|$ αφού $\gamma > 0$.

ΘΕΜΑ 156

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + \alpha x + 2 & \text{αν } x < 0 \\ \beta + \ln(1 + x^4) & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Σε καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη, αφού συμπίπτει με παραγωγίσιμη συνάρτηση, που έχει τύπο $x^4 + \alpha x + 2$ και $\beta + \ln(1 + x^4)$ αντίστοιχα.

Για να είναι λοιπόν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί να είναι παραγωγίσιμη για $x = 0$.

Παραγωγισιμότητα για $x = 0$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι η f παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ είναι να είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Προς τούτο, πρέπει και αρκεί να είναι

$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$. Είναι όμως $f(0) = \beta$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^4 + \alpha x + 2) = 2$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \beta$ οπότε έχουμε $\boldsymbol{\beta = 2}$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, πρέπει και αρκεί να έχουμε

$f_\alpha'(0) = f_\delta'(0)$. Έχουμε όμως $f_\alpha'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x^4 + \alpha x + 2) - 2}{x}$

και $f_\delta'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 + \ln(1 + x^4) - 2}{x}$.

Για την εύρεση των παραπάνω ορίων, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις f_1, f_2 με τύπους $f_1(x) = x^4 + \alpha x + 2$ και $f_2(x) = 2 + \ln(1 + x^4)$ ορίζονται στο $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, άρα είναι παραγωγίσιμες και για $x = 0$.

Είναι δε $f_1'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^4+\alpha x+2)-2}{x}$ και

$f_2'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)-f_2(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\ln(1+x^4)-2}{x}$ και $f_1'(x)=4x^3+\alpha$,

$f_2'(x)=\dfrac{4x^3}{1+x^4}$ $\forall x\in \mathbb{R}$ οπότε $f_1'(0)=\alpha$ και $f_2'(0)=0$.

Προκύπτει λοιπόν ότι είναι $f_\alpha'(0)=f_1'(0)=\alpha$ και $f_\delta'(0)=f_2'(0)=0$. Συμπεραίνουμε τελικά ότι η f είναι παραγωγίσιμη για $x=0$, τότε και μόνο, όταν είναι **$\alpha=0$ και $\beta=2$.**

● **Σχόλιο.** Η μέθοδος εφαρμόζεται για τη συνθήκη παραγωγισιμότητας σε σημείο x_0, συναρτήσεων της μορφής $f(x)=\begin{cases} g_1(x) & \text{αν } x\le x_0 \\ g_2(x) & \text{αν } x>x_0\end{cases}$ στην περίπτωση που οι τύποι $g_1(x)$, $g_2(x)$ είναι τύποι συναρτήσεων, παραγωγισίμων στο x_0.

Παρατηρούμε ότι για να είναι η f συνεχής στο x_0 πρέπει να είναι $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ (1). Όμως $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_1(x)=g_1(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_2(x)=g_2(x_0)$ αφού οι g_1, g_2 είναι συνεχείς στο x_0

(σαν παραγωγίσιμες σ' αυτό). Η συνθήκη (1) γίνεται $g_1(x_0)=g_2(x_0)$ (2). Με την προϋπόθεση τώρα της (2) έχουμε

$f_\alpha'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{g_1(x)-g_1(x_0)}{x-x_0}=g_1'(x_0)$ και

$f_\delta'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g_2(x)-g_1(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g_2(x)-g_2(x_0)}{x-x_0}=g_2'(x_0)$

αφού $g_1(x_0)=g_2(x_0)$ και οι g_1, g_2 είναι παραγωγίσιμες στο x_0.
Η τελική συνθήκη για να είναι η f παραγωγίσιμη για $x=x_0$ γράφεται λοιπόν $\{g_1(x_0)=g_2(x_0)$ και $g_1'(x_0)=g_2'(x_0)\}$ και δεν απαιτεί υπολογισμό ορίων, αλλά πράξεις παραγώγισης.

ΘΕΜΑ 157

√ **Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,3]\to \mathbb{R}$, συνεχή στο $[0,3]$, παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ και τέτοια ώστε να είναι $f(0)=-2$ και $f'(x)>1$ για $0<x<3$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα και μόνο x_0 με $x_0\in(0,3)$ για το οποίο είναι $f(x_0)=0$.**

ΛΥΣΗ

Η συνθήκη $f'(x) > 1$ για $0 < x < 3$ γράφεται $[f(x) - x]' > 0 \ \forall x \in (0, 3)$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) - x$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0, 3)$, αλλά επίσης και στο $[0, 3]$, αφού είναι συνεχής σ' αυτό. Είναι λοιπόν $g(0) < g(x)$ για $0 < x \leq 3$ δηλαδή $f(0) < f(x) - x$ για $0 < x \leq 3$ άρα και $f(x) > x + f(0)$ για $0 < x \leq 3$ δηλαδή $f(x) > x - 2$ για $0 < x \leq 3$. Συμπεραίνουμε ότι είναι $f(x) > 0$ για $2 \leq x \leq 3$. Είναι όμως $f(0) = -2 < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, υπάρχει x_0 με $0 < x_0 < 2$ με $f(x_0) = 0$. Τούτο είναι μοναδικό, αφού η f είναι αυστηρώς αύξουσα στο $[0, 3]$ ($f'(x) > 1 > 0$ για $0 < x < 3$).

● Όπως το δεδομένο $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ αξιοποιείται με το συμπέρασμα ότι η f είναι αυστηρώς αύξουσα στο διάστημα αυτό, έτσι και ένα δεδομένο της μορφής $f'(x) > \lambda \ \forall x \in (\alpha, \beta)$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $f(x) - \lambda x$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο εν λόγω διάστημα.

Γενικότερα οι ανισότητες

$f'(x) \geq x \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$f'(x) \geq \text{συν}x \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$f'(x) \geq \varphi(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

σημαίνουν αντίστοιχα ότι είναι αυστηρώς αύξουσες στο (α, β) οι συναρτήσεις

$$f(x) - \frac{x^2}{2}, \ f(x) - \text{ημ}x \ \text{και} \ f(x) - \Phi(x)$$

όπου $\Phi(x)$ μία παράγουσα της $\varphi(x)$ στο (α, β).

ΘΕΜΑ 158

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{αν } |x| \geq 1 \\ e - e^{x^2} & \text{αν } |x| < 1 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

ΛΥΣΗ

α) ● Σε καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ και $(-1, 1)$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, αφού στα δύο πρώτα είναι $f(x) = x^2 - 1$, ενώ στο τρίτο $f(x) = e - e^{x^2}$ και οι συναρτήσεις $x^2 - 1$ και $e - e^{x^2}$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα. Εξετάζουμε τώρα τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα της f στα σημεία -1 και 1.

Εχουμε λοιπόν $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2 - 1) = 0$ καθώς επίσης και

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (e - e^{x^2}) = e - e = 0$ και $f(-1) = 0$. Άρα λοιπόν είναι

είναι $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 0$ και η f είναι συνεχής στο -1.

Επίσης $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (e - e^{x^2}) = 0$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

και $f(1) = 0$, οπότε η f είναι συνεχής και για $x = 1$.

Η f είναι λοιπόν συνεχής στο $\mathbb{R}$.

● **Παραγωγισιμότητα στα σημεία –1 και 1**

Είναι $f_\alpha'(-1) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x\to -1^-} (x - 1) = -2$

και $f_\delta'(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{e - e^{x^2}}{x + 1}$ $\left(\text{αοριστία } \dfrac{0}{0}\right)$. Με κανόνα του Hospital

βρίσκουμε $f_\delta'(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-2xe^{x^2}}{1} = 2e$.

Άρα $f_\alpha'(-1) \neq f_\delta'(-1)$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη για $x = -1$.

Όμοια, είναι $f_\alpha'(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e - e^{x^2}}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2xe^{x^2}}{1} = -2e$

και $f_\delta'(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x + 1) = 2$.

Είναι λοιπόν $f_\alpha'(1) \neq f_\delta'(1)$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη για $x = 1$.

β) ● **Μονοτονία και ακρότατα της f**

Εχουμε $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{αν } x < -1 \\ -2xe^{x^2} & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↘	0	↗		↘	0	↗

Η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ και είναι $f_{max} = f(0) = e - 1 > 0$.

Για $x=-1$ και για $x=1$ η f έχει ελάχιστο αφού είναι $f(-1)=f(1)=0$ και $f(x)\geq 0 \ \forall x\in \mathbb{R}$.

Σχόλιο: Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$ η συνάρτηση δεν έχει μέγιστο.

ΘΕΜΑ 159

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ένας αριθμός $\lambda<0$.

Αν ισχύει: $f^3(x+2)+\lambda f^2(3x)+3e^{x-1}=0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x-3}$ (2) παρουσιάζει ακρότατο για $x=3$, να βρείτε το λ και το $g(3)$.

ΛΥΣΗ

Εφόσον η g(x) παρουσιάζει ακρότατο στο $x=3$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ από το Θ. του Fermat συμπεραίνουμε ότι $g'(3)=0$. Από την (2) όμως παραγωγίζοντας παίρνουμε $g'(x)=f'(x)-e^{x-3}$ και κατά συνέπεια $f'(3)=1$. Παραγωγίζοντας όμως την (1) παίρνουμε

$3f^2(x+2)f'(x+2)+2\lambda f(3x)f'(3x)3+3e^{x-1}=0$ στην οποία θέτοντας $x=1$ έχουμε $3f^2(3)f'(3)+6\lambda f(3)f'(3)+3=0$ και εφόσον $f'(3)=1$ έχουμε $f^2(3)+2\lambda f(3)+1=0$ (3). Αλλά επειδή η f είναι συνάρτηση το f(3) παίρνει μοναδική τιμή συνεπώς η εξίσωση (3) έχει μοναδική λύση άρα $\Delta=0$ ισοδύναμα $4\lambda^2-4=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$ όμως $\lambda<0$ οπότε $\boldsymbol{\lambda=-1}$. Την τιμή $\lambda=-1$ τη θέτουμε στην (3) και έχουμε $f^2(3)-2f(3)+1=0 \Leftrightarrow (f(3)-1)^2=0$ δηλαδή $\mathbf{f(3)=1}$. Από την (2) για $x=3$ παίρνουμε $\mathbf{g(3)=0}$.

ΘΕΜΑ 160

Έστω f η συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=1+x-\ln|e^x-e|$$

α) Να βρείτε το (μέγιστο) σύνολο ορισμού A της f και να δείξετε ότι $\forall x\in A$ είναι

$$f(x)=1-\ln|1-e^{1-x}|=x-\ln|e^{x-1}-1|$$

β) Να μελετήσετε τη μεταβολή της f στο A κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα μεταβολής.

ΛΥΣΗ

α) ● Η f ορίζεται τότε και μόνο, όταν είναι $x \in \mathbb{R}$ με $e^x \neq e$. Το σύνολο ορισμού της f είναι λοιπόν το $A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $\forall x \in A$ είναι $e^x - e = e^x(1 - e^{1-x})$ οπότε

$\ln|e^x - e| = \ln(e^x) + \ln|1 - e^{1-x}| = x + \ln|1 - e^{1-x}|$ άρα λοιπόν και

$f(x) = 1 + x - x - \ln|1 - e^{1-x}| = 1 - \ln|1 - e^{1-x}| \quad \forall x \in A$

Όμοια βρίσκουμε και $e^x - e = e(e^{x-1} - 1)$ οπότε

$\ln|e^x - e| = \ln e + \ln|e^{x-1} - 1| = 1 + \ln|e^{x-1} - 1|$

και τελικά $f(x) = x - \ln|e^{x-1} - 1| \quad \forall x \in A$.

β) ● Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A με

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x - e} = -\frac{e}{e^x - e} = \frac{e}{e - e^x} \quad \forall x \in A$$

Άρα $f'(x) > 0$ για $x < 1$ και $f'(x) < 0$ για $x > 1$.

Επίσης $f''(x) = \dfrac{-e}{(e - e^x)^2}(-e^x) = \dfrac{e^{x+1}}{(e - e^x)^2} > 0 \quad \forall x \in A$.

Συμπεραίνουμε ότι η f είναι αυστηρώς αύξουσα για $x < 1$ και αυστηρώς φθίνουσα για $x > 1$, στρέφει δε το διάγραμμά της τα κοίλα προς τα άνω, σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Η μεταβολή της f στο A φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	‖	+
$f'(x)$	+	‖	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$ (∪)	‖	$+\infty$ ↘ 1 (∪)

● **Όρια για $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$**

Είναι $f(x) = 1 - \ln|1 - e^{1-x}| \quad \forall x \in A$. Για $x \to +\infty$ έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = 0$

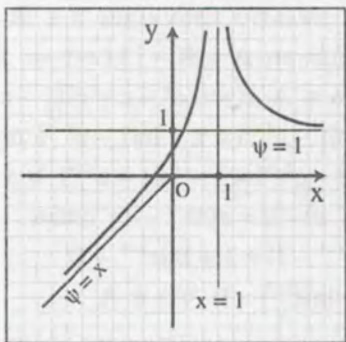
και $\ln|1 - e^{1-x}| \to 0$ για $x \to +\infty$. Θα είναι λοιπόν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Όμοια, για $x \to -\infty$, θα έχουμε $e^{x-1} \to 0$ οπότε $\ln|e^{x-1} - 1| \to \ln 1 = 0$ για $x \to -\infty$ και τελικά $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [x - \ln|e^{x-1} - 1|] = -\infty$.

● **Διάγραμμα της f.**

Η f έχει για $x \to +\infty$, οριζόντια ασύμπτωτο την ευθεία $y = 1$ και για $x \to -\infty$, πλάγια ασύμπτωτο τη διχοτόμο $y = x$, αφού είναι

$$f(x) - x = -\ln|e^{x-1} - 1| \to 0 \text{ για } x \to -\infty$$



ΘΕΜΑ 161

α) Έστω f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$ $(x > 0)$ και g:$(0, +\infty)$ η συνάρτηση με τύπο $g(x) = |x - 1|\ln x$ για $x > 0$.
Να μελετήσετε την παραγωγισιμότητα των f, g για $x > 0$, να βρείτε τα όρια αυτών για $x \to 0^+$ και $x \to +\infty$
Να μελετήσετε τη μονοτονία και το πρόσημο των τιμών f(x) για $x > 0$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να μελετηθεί η μεταβολή της g στο $(0, +\infty)$ και να σχεδιάσετε τον αντίστοιχο πίνακα μεταβολής. Σχεδιάστε επίσης το διάγραμμα (c) της g. (Μελέτη της g'').

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $-\frac{1}{x} \to -\infty$ για $x \to 0^+$ και $\ln x \to -\infty$ για $x \to 0^+$. Άρα λοιπόν θα είναι και $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x \to -\infty$ για $x \to 0^+$. Επίσης $f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Είναι επίσης $g(x) = (1 - x)\ln x$ για $0 < x < 1$ και $g(x) = (x - 1)\ln x$ για $x > 1$, έχουμε δε

$$\lim_{x \to 0^+} (x\ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1} = 0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (1-x)\ln x = \lim_{x\to 0^+} (\ln x - x\ln x) = -\infty - 0 = -\infty$.

Τέλος, είναι και $g(+\infty) = \lim_{x\to +\infty} (x-1)\ln x = +\infty$.

● **Παράγωγος της f.** Η f είναι παραγωγίσιμη, $\forall\, x > 0$ και είναι

$f'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2}$ $\forall\, x > 0$ οπότε $f'(x) > 0$ $\forall\, x > 0$

ενώ $f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = -\frac{x+2}{x^3} < 0$ για κάθε $x > 0$.

Η f είναι αυστηρώς αύξουσα και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(0, +\infty)$. Η μεταβολή της f φαίνεται στον επόμενο πίνακα

x	0	+∞
f''(x)	−	
f'(x)	+	
f(x)	−∞ ↗	+∞

● **Πρόσημο και σύνολο τιμών της f**

Είναι $f(1) = 0$. Άρα λοιπόν $f(x) < 0$ για $0 < x < 1$ και $f(x) > 0$ για $x > 1$. Το σύνολο τιμών της f, αφού είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ με $f(0_+) = -\infty$ και $f(+\infty) = +\infty$, είναι το σύνολο $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

● **Παραγωγισιμότητα της g**

Είναι $g(x) = \begin{cases} (1-x)\ln x & \text{για } 0 < x < 1 \\ (x-1)\ln x & \text{για } 1 < x < +\infty \end{cases}$. Έχουμε λοιπόν για $0 < x < 1$

$g'(x) = \frac{1-x}{x} - \ln x = -f(x) > 0$, αφού $f(x) < 0$ για $0 < x < 1$. Ενώ για

$1 < x < +\infty$ είναι $g'(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x = f(x) > 0$ αφού $f(x) > 0$ για $x > 1$

Επίσης $g_\alpha'(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} \ln x = 0$ και

$$g_\delta'(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\ln x}{x-1} = 0. \text{ Άρα } g'(1) = 0.$$

● **Δεύτερη παράγωγος της g**

Για $0 < x < 1$ είναι $g''(x) = -f'(x) = -\frac{x+1}{x^2} < 0$. Επίσης, για $1 < x < +\infty$

Επίσης, για $1 < x < +\infty$ είναι $g''(x) = f'(x) = \frac{x+1}{x^2} > 0$. Έχουμε όμως

$$(g')_{\alpha}'(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-f(x)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x-1}\right] = -2 \text{ αφού}$$

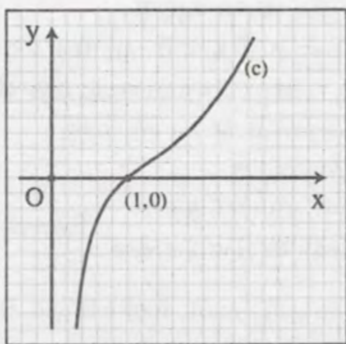
$\frac{\ln x}{x-1} \to 1$ για $x \to 1$ (Hospital).

Επίσης $(g')_{\delta}'(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x-1}\right] = 2.$

Η g δεν έχει δεύτερη παράγωγο για $x = 1$. Η μεταβολή της g φαίνεται στον επόμενο πίνακα

x	0		1		+∞
g''(x)		−	‖	+	
g'(x)		+	0	+	
g(x)	−∞	↗ (κοίλη)	ΣΚ (0, 1)	↗ (κυρτή)	+∞

● **Διάγραμμα της g**



ΘΕΜΑ 162

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: (0, +∞) → ℝ, με τύπο

$$f(x) = (x+1)^{\alpha} - x^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία όταν $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $7^x + 3^x = 6^x + 4^x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έχουμε

$f'(x) = \alpha(x+1)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha[(x+1)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}]\ \forall x > 0$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1) $\alpha = 0$ είτε $\alpha = 1$

Είναι $f'(x) = 0\ \forall x > 0$, οπότε η f είναι σταθερή, με $f(x) = 0\ \forall x > 0$ όταν $\alpha = 0$ και $f(x) = 1\ \forall x > 0$ όταν $\alpha = 1$.

2) $\alpha > 1$ είτε $\alpha < 0$

Στην πρώτη περίπτωση, είναι $\alpha - 1 > 0$, άρα

$(x+1)^{\alpha-1} > x^{\alpha-1}\ \forall x > 0$ και $f'(x) > 0\ \forall x > 0$

Στη δεύτερη, έχουμε $(x+1)^{\alpha-1} < x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$, οπότε πάλι είναι

$f'(x) > 0\ \forall x > 0$, αφού $\alpha < 0$. Η f είναι αυστηρώς αύξουσα συνάρτηση.

3) $0 < \alpha < 1$

Είναι $(x+1)^{\alpha-1} < x^{\alpha-1}\ \forall x > 0$, άρα και $f'(x) < 0$, $\forall x > 0$.

Η f είναι αυστηρώς φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Η εξίσωση γράφεται $7^x - 6^x = 4^x - 3^x$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = (t+1)^x - t^x\ \forall t > 0$ (ανεξάρτηση μεταβλητή το t). Η εξίσωση γίνεται $f(6) = f(3)$.

Παρατηρούμε ότι αν είναι $x \neq 0$ και $x \neq 1$ η f είναι αυστηρά μονότονη άρα και 1–1 και η ισότητα $f(3) = f(6)$ είναι αδύνατη.

Για $x = 0$ είτε $x = 1$ η f είναι σταθερή και φυσικά έχουμε $f(6) = f(3)$. Η εξίσωση έχει λοιπόν μοναδικές λύσεις, τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

ΘΕΜΑ 163

Εάν η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ την ευθεία $y = 5x - 1$ να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + 5x\eta\mu x}{x^2 f(x) - 5x^3 + 4\eta\mu x^2}$$

ΛΥΣΗ

Είναι $\dfrac{xf(x) - 3x^2 + 5x\eta\mu x}{x^2 f(x) - 5x^3 + 4\eta\mu x^2} = \dfrac{x^2\left[\dfrac{f(x)}{x} - 3 + 5\,\dfrac{\eta\mu x}{x}\right]}{x^2\left[f(x) - 5x + 4\,\dfrac{\eta\mu x^2}{x^2}\right]} = \dfrac{\dfrac{f(x)}{x} - 3 + 5\,\dfrac{\eta\mu x}{x}}{f(x) - 5x + 4\,\dfrac{\eta\mu x^2}{x^2}}$.

Έχουμε όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=5$ και $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-5x]=-1$ διότι $y=5x-1$ είναι ασύμπτωτος της f στο $+\infty$. Ακόμη έχουμε $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{x}$, $x>0$ και $\left|\frac{\eta\mu x^2}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x^2}{x^2}=0 \text{ διότι } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{f(x)}{x}-3+5\frac{\eta\mu x}{x}}{f(x)-5x+4\frac{\eta\mu x^2}{x^2}}=\dfrac{5-3+5\cdot 0}{-1+4\cdot 0}=-2$.

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι -2.

ΘΕΜΑ 164

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Εάν η f έχει όριο στο $+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=3$ να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$$

ΛΥΣΗ

Είναι $f(x)+f'(x)=\dfrac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}=\dfrac{(e^x f(x))'}{(e^x)'}$

- Έστω $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$ τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)e^x}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x)e^x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=3.$$

Θέτουμε $\Phi(x)=f(x)+f'(x)$ οπότε $f'(x)=f(x)-\Phi(x)$ και $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=3-3=0$.

Άρα αν $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$ τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$ και $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

- Έστω $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του Lagrange στο διάστημα $[x, x+1]$ δηλ. υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$: $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$.

Εφόσον $x \to +\infty$ και $x < \xi < x+1$ θα έχουμε και $(x+1) \to +\infty$ και $\xi \to +\infty$. Άρα και $\lim_{x \to +\infty} f(x+1) = 0$ οπότε και $\lim_{\xi \to +\infty} f'(\xi) = 0$.

Άτοπο διότι $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 3$.

Συνεπώς $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$ οπότε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ και $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 165

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f_\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2[(\ln(x^2) - \alpha] & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

της οποίας το αντίστοιχο διάγραμμα σημειώνουμε με C_α.

α) Να βρείτε την παράγωγο $f_\alpha'(x)$ για $x \neq 0$ και να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f_\alpha'(x) = 0$ και να δείξετε ότι τα αντίστοιχα σημεία $M(x, f(x))$ που αντιστοιχούν στις λύσεις αυτής της εξίσωσης, είναι $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ σημεία της παραβολής $y = -\frac{x^2}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x \neq 0$ είναι $f_\alpha'(x) = x[\ln(x^2) - \alpha] + \frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2}$ δηλαδή

$f_\alpha'(x) = x + x[\ln(x^2) - \alpha] = x[1 - \alpha + \ln(x^2)]$ για $x \neq 0$.

Για $x \neq 0$ έχουμε $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} x\,[\ln x(x^2) - \alpha]$ δηλαδή

$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} x\ln(x^2) - \frac{\alpha x}{2}$ για $x \neq 0$.

Είναι όμως $\frac{\alpha x}{2} \to 0$ για $x \to 0$ και $\lim_{x \to 0}[x\ln(x^2)] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}}$

άρα και $\lim_{x \to 0}[x\ln(x^2)] = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0}(-2x) = 0$ (κανόνα Hospital)

Βρίσκουμε λοιπόν ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$, οπότε $f_\alpha'(0)=0\ \forall\, \alpha\in \mathbb{R}$.

β) Για $x\neq 0$, θα είναι $f_\alpha'(x)=0$ τότε και μόνο, όταν είναι $1-\alpha+\ln(x^2)=0$, δηλαδή αν και μόνο είναι $\ln(x^2)=\alpha-1$ δηλαδή $x^2=e^{\alpha-1}$.

Για τις τιμές όμως αυτές του x, είναι $\ln(x^2)=\alpha-1$ και

$f_\alpha(x)=\frac{1}{2}e^{\alpha-1}(\alpha-1-\alpha)=-\frac{1}{2}e^{\alpha-1}=\frac{1}{2}x^2$.

Άρα λοιπόν, τα σημεία $(x, y=f(x))$ είναι σημεία της παραβολής $y=-\frac{1}{2}x^2$ όπου τέτοιο είναι και το $(x=0, f(0)=0)$ που αντιστοιχεί στη λύση $x=0$ της εξίσωσης $f_\alpha'(x)=0$.

ΘΕΜΑ 166

Δίνεται συνάρτηση f αυστηρά θετική με αυστηρά φθίνουσα πρώτη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=e^\alpha$, $f(\beta)=e^\beta$.

Να δείξετε ότι $\forall\, c\in\mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ στο οποίο η εφαπτόμενη στη C_f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=f(x_0)x+c$.

ΛΥΣΗ

Η εφαπτόμενη στη C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$ για να είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) πρέπει να ισχύει $f'(x_0)=f(x_0)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

Παίρνουμε τη συνάρτηση $\Phi(x)=\ln f(x)-x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ άρα και συνεχής. Έχουμε

$\Phi(\alpha)=\ln f(\alpha)-\alpha=\ln e^\alpha-\alpha=0$ και

$\Phi(\beta)=\ln f(\beta)-\beta=\ln e^\beta-\beta=0$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα

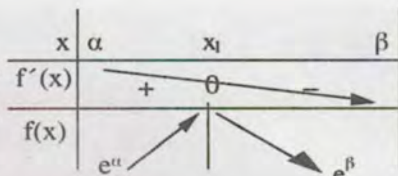
● Εφόσον $f(x)>0\ \forall\, x\in[\alpha,\beta]$ η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ ισοδυναμεί με την

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1 \Leftrightarrow (\ln f(x)-x)'=0$$

Αρκεί λοιπόν για τη συνάρτηση $\Phi(x)=\ln f(x)-x$ να εφαρμόζεται το θ. Rolle.

$x_0\in(\alpha,\beta)$: $\Phi'(x_0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}=1 \Leftrightarrow f'(x_0)=f(x_0)$

Μοναδικότητα



Εάν $f'(x)<0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$ τότε η f αυστηρά φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, άτοπο αφού $e^{\alpha}<e^{\beta}$. Άρα $\exists x_1 \in (\alpha,\beta]$: $f'(x)>0$ $\forall x \in (\alpha, x_1)$ εφόσον f΄ αυστηρά φθίνουσα.

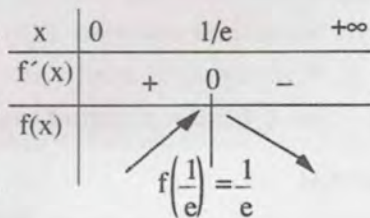
Στο διάστημα $[x_1,\beta]$ (αν υπάρχει διότι αν $x_1=\beta$ θα είναι σημείο) η εξίσωση $f'(x)-f(x)=0$ θα είναι αδύνατη διότι $f'(x)\le 0$ και $-f(x)<0$ άρα η τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης, που αποδείξαμε ότι υπάρχει θα ανήκει στο (α, x_1). Σ' αυτό όμως το διάστημα η $f'(x)>0$ άρα η f(x) αυστηρά αύξουσα, η δε $f'(x)$ αυστηρά φθίνουσα, συνεπώς η ρίζα της $f'(x)-f(x)=0$ θα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 167

√Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x)=x\ln\frac{1}{x}$ και να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{1}{x}\le e^{\frac{1}{ex}}$.

ΛΥΣΗ

Η $f(x)=x(\ln 1-\ln x)=-x\ln x$ και είναι παραγωγίσιμη $\forall x>0$ με $f'(x)=-\ln x - x\frac{1}{x}=-\ln x-1$. Για $x=\frac{1}{e}$ η $f'(x)$ μηδενίζεται και $f'(x)>0$ για $0<x<\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$ για $x>\frac{1}{e}$. Άρα η f είναι αυστηρά αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και αυστηρά φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, συνεπώς στο $\frac{1}{e}$ παρουσιάζει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$. Έχουμε λοιπόν $f(x)\le\frac{1}{e}$ $\forall x>0$ δηλαδή



$$x\ln\frac{1}{x}\le\frac{1}{e}\Leftrightarrow \ln\frac{1}{x}\le\frac{1}{ex}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\le e^{\frac{1}{ex}}.$$

ΘΕΜΑ 168

Έστω συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(f'(x)) \geq (x-1)^2 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x = 1$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων να δείξετε ότι $f''(1) = 0$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(f'(x)) - (x-1)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Όμως η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x = 1$ που είναι εσωτερικό σημείο και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, συνεπώς $f'(1) = 0$ (Θ. Fermat).
Άρα $\Phi(1) = f(f'(1)) - (1-1)^2 = f(0)$, αλλά $f(0) = 0$ διότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Οπότε $\Phi(1) = 0$.
Έχουμε λοιπόν για την Φ: $\Phi(x) \geq \Phi(1)$ δηλαδή η Φ παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 κατά συνέπεια $\Phi'(1) = 0$. Αλλά $\Phi'(x) = f'(f'(x))f''(x) - 2(x-1)$ και $\Phi'(1) = f'(f'(1))f''(1) = f'(0)f''(1)$. Η σχέση λοιπόν $\Phi'(1) = 0$ ισοδυναμεί με την $f'(0)f''(1) = 0$ (2). Αλλά $f'(0) \neq 0$ διότι αν $f'(0) = 0$ τότε από την (1) θα έχουμε $f(0) \geq (0-1)^2 \Leftrightarrow 0 \geq 1$ που είναι άτοπο, άρα $f'(0) \neq 0$.
Συνεπώς από τη (2) έχουμε $f''(1) = 0$.

ΘΕΜΑ 169

Έστω $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, συνάρτηση παραγωγίσιμη για $x = 0$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in (-1, 1)$ να είναι $|f(x)| \leq αημx + συνx + x^2 - 1$ (1).

α) Να δείξετε ότι είναι $f'(0) = 0$ και $α = 0$.

β) Να δείξετε ότι $συνx + x^2 - 1 \geq 0$, $\forall x \in (-1, 1)$ και ότι υπάρχει συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ τέτοια ώστε να επαληθεύει την (1).

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ παίρνουμε από την (1) $|f(0)| \leq 0$. Θα είναι λοιπόν $f(0) = 0$.
Η (1) γίνεται επίσης

> ● **Κεντρική ιδέα:** Σε περιπτώσεις που μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι μια συνάρτηση f έχει ακρότατο για $x = ξ$ (εσωτερικό) και ότι είναι παραγωγίσιμη για $x = ξ$, συμπεραίνουμε ότι είναι $f'(ξ) = 0$.

$-αημx - συνx - x^2 + 1 \leq f(x) \leq αημx + συνx + x^2 - 1$, $\forall x \in (-1, 1)$

οπότε έχουμε $f(x) - αημx - συνx - x^2 + 1 \leq 0$ $\quad \forall x \in (-1, 1)$ (2)

και $f(x) + αημx + συνx + x^2 - 1 \geq 0$ $\quad \forall x \in (-1, 1)$ (3)

Παρατηρούμε τώρα ότι για $x = 0$ τα πρώτα μέλη των (2) και (3) παίρνουν την τιμή $f(0) - α·0 - 1 - 0^2 + 1 = 0$ και $f(0) + α·0 + 1 + 0^2 - 1 = 0$ αντίστοιχα.

Συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις με τύπους
$φ_1(x) = f(x) - αημx - συνx - x^2 + 1$
και
$φ_2(x) = f(x) + αημx + συνx + x^2 - 1$
έχουν για $x = 0$ εσωτερικό μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα, και επειδή είναι παραγωγίσιμες για $x = 0$, θα έχουμε
$φ_1'(0) = 0$ και $φ_2'(0) = 0$.

● Μόνο η ανισότητα $f(x) \le α \ \forall x \in Δ$ δεν αρκεί για να βεβαιώσουμε ότι η f έχει μέγιστο ίσο με το α. Χρειάζεται να βεβαιώσουμε ότι για κάποιο $x_0 \in Δ$ η τιμής της συνάρτησης γίνεται ίση με α. Με τα πρόσθετα δεδομένα τότε, ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, συμπεραίνουμε ότι είναι και $f'(x_0) = 0$.

Είναι όμως $φ_1'(x) = f'(x) - ασυνx + ημx - 2x$ και
$φ_2'(x) = f'(x) + ασυνx - ημx + 2x$ οπότε $φ_1'(0) = f'(0) - α = 0$ και
$φ_2'(0) = f'(0) + α = 0$.
Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $2f'(0) = 0$ άρα λοιπόν $f'(0) = 0$ οπότε είναι και $α = 0$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $Φ(x) = συνx + x^2 - 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $Φ'(x) = -ημx + 2x$ και $Φ''(x) = 2 - συνx$. Η $Φ''(x)$ είναι αυστηρά θετική $\forall x \in (-1,1)$, κατά συνέπεια $Φ'(x)$ αυστηρά αύξουσα στο

x	−1	0	1
Φ´´(x)		+	
Φ´(x)	−	0	+
Φ(x)	↘	0	↗

$(-1, 1)$ και είναι $Φ'(0) = 0$. Έχουμε λοιπόν $Φ'(x) < 0$ για $-1 < x < 0$ και $Φ'(x) > 0$ για $0 < x < 1$. Συνεπώς $Φ(x)$ αυστηρά φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και αυστηρά αύξουσα στο $[0, 1)$, άρα $Φ(x) \ge Φ(0) \ \forall x \in (-1, 1)$ δηλαδή $συνx + x^2 - 1 \ge 0 \ \forall x \in (-1, 1)$. Εφόσον αποδείξαμε ότι $α = 0$ η (1) γίνεται $|f(x)| \le συνx + x^2 - 1$ και εφόσον $συνx + x^2 - 1 \ge 0 \ \forall x \in (-1, 1)$ υπάρχει τέτοια συνάρτηση λόγου χάριν η $f(x) = \frac{1}{2}(συνx + x^2 - 1)$.

ΘΕΜΑ 170

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αe^x + βe^{-x}$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν τα $α, β \in \mathbb{R}$ αν η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής σε σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη της C_f είναι η ευθεία $y = 2\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\ln 2$ ▶

▶

β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(3,0)$ από την C_f και αν M_0 το σημείο που έχει αυτή την απόσταση από το A να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου AM_0B όπου B το σημείο που τέμνει η εφαπτόμενη της C_f στο M_0 τον $x'x$.

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\alpha e^x-\beta e^{-x}$ και η f' παραγωγίσιμη με $f''(x)=\alpha e^x+\beta e^{-x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Εφόσον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη αν παρουσιάζει σημείο καμπής σε κάποιο x_0 τότε $f''(x_0)=0$ άρα και $f(x_0)=0$ αφού $f''(x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Η εφαπτόμενη στο $(x_0, f(x_0))$ δηλαδή στο $(x_0, 0)$ είναι

$y=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x-x_0f'(x_0)$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{aligned} f(x_0)&=0\\ f'(x_0)&=2\sqrt{2}\\ \text{και } -x_0f'(x_0)&=\sqrt{2}\ln 2\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} \alpha e^{x_0}+\beta e^{-x_0}&=0\\ \alpha^{x_0}-\beta e^{-x_0}&=2\sqrt{2}\\ -x_0 2\sqrt{2}&=\sqrt{2}\ln 2\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{\sqrt{2}}+\beta\sqrt{2}&=0\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}-\beta\sqrt{2}&=2\sqrt{2}\\ x_0&=-\ln\sqrt{2}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=-2\beta\\ \alpha-2\beta&=4\\ x_0&=-\ln\sqrt{2}\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}\beta&=-1\\ \alpha&=2\\ x_0&=-\ln\sqrt{2}\end{aligned}\right\}\ \text{οπότε η } f(x)=2e^x-e^{-x}.$$

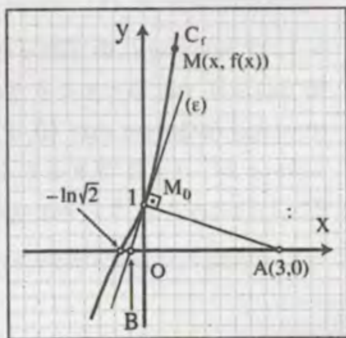
β) Η απόσταση του $A(3,0)$ από τυχόν σημείο $M(x, f(x))$ της C_f είναι $\Phi^2(x)=f^2(x)+(x-3)^2$ με $2\Phi(x)\Phi'(x)=2f(x)f'(x)+2(x-3)$. Εφόσον η Φ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αν παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο x_0 τότε $\Phi'(x_0)=0$

Οπότε το x_0 θα είναι ρίζα της εξίσωσης

$f(x)f'(x)+(x-3)=0$ (1)

Αλλά επειδή $(f(x)f'(x)+x-3)'=$

$=f'(x)f'(x)+f(x)f''(x)+1=$



$=(f'(x))^2+(f(x))^2+1>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ αν υπάρχει ρίζα της (1) θα είναι μοναδική. Η (1) ισοδυναμεί με την $(2e^x-e^{-x})(2e^x+e^{-x})+x-3=0$ η οποία έχει προφανή ρίζα το μηδέν και επειδή $[\Phi(x)\Phi'(x)]'=(f'(x))^2+(f(x))^2+1>0\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(\Phi^2(x))''>0 \text{ άρα}}$ παρουσιάζει ελάχιστο $x_0=0$ το

$\Phi(0)=\sqrt{f^2(0)+(-3)^2}=\sqrt{10}$. Το σημείο M_0 είναι το $(0,1)$ αφού $f(0)=1$.

Η εφαπτόμενη στο (0, 1) είναι: $y - 1 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 3x + 1$ και $B\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

Αν 0 είναι η αρχή των αξόνων έχουμε ότι το εμβαδό του τριγώνου AM_0B είναι:

$\frac{1}{2}(BA)(OM_0) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot 1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 171

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{3x^2 - 1}$ ως προς μονοτονία - ακρότατα - κοίλα και να βρεθούν οι ασύμπτωτες.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \ln x$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.

γ) Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της $\Phi(x) = \dfrac{x\ln x}{(x^2 + 1)^2}$ είναι το $[\Phi(x_1), \Phi(x_2)]$.

δ) Αν $G(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x > 0 \\ \alpha, & x \neq 0 \end{cases}$ να βρεθεί ο α έτσι ώστε η G να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και κατόπιν να εξετάσετε αν η G είναι παραγωγίσιμη και αν ορίζεται εφαπτομένη της καμπύλης C_G σ' αυτό.

ΛΥΣΗ

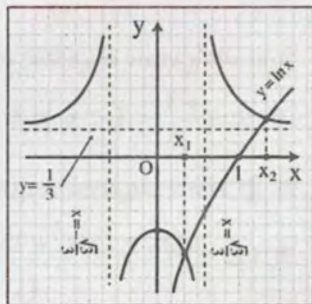
α) Η f έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ και είναι 2 φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό, με

$f'(x) = -\dfrac{8x}{(3x^2-1)^3}$, $f''(x) = \dfrac{8(9x^2+1)}{(3x^2-1)^3}$

Ο πίνακας μεταβολής είναι

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}/3$		0		$\sqrt{3}/3$		+
f΄(x)		+	‖	+	0	−	‖	−	
f΄΄(x)		+	‖	−		−	‖	+	
f(x)	1/3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(0) = -1$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1/3

Η f΄(x) είναι ετερόσημη του x άρα η f είναι αυστηρά αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ και $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]$ και αυστηρά φθίνουσα στα $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ και έχει μέγιστο το $f(0) = -1$. Η f΄΄(x) είναι ομόσημη του $3x^2 - 1$ άρα η C_f είναι κυρτή στα διαστήματα



$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και κοίλη στο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{3}}{3}^-} f(x)=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{3}}{3}^+} f(x)=-\infty$ η ευθεία $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

Όμοια $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^+} f(x)=+\infty$ η $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος. Το δε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{1}{3}$ οπότε η $y=\frac{1}{3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτος και στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

β) Η $g(x)=f(x)-\ln x$ είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-\ln x)=-1+\infty=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^-}(f(x)-\ln x)=$

$=-\infty-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=-\infty$ συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right): g(x_1)=0$

Αλλά $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}<0$ διότι $f'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ άρα υπάρχει ακριβώς ένα x_1: $g(x_1)=0$ στο διάστημα αυτό.

Όμοια στο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^+} g(x)=+\infty-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{3}-\infty=-\infty$

και $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}<0$ συνεπώς υπάρχει ακριβώς ένα x_2 στο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_2)=0$ και επειδή $g(1)=f(1)-\ln 1=1>0$ και

$g(2)=f(2)-\ln 2=\frac{5}{11}-\ln 2<\frac{5}{11}-\ln\sqrt{e}<\frac{5}{11}-\frac{1}{2}<0$ το $x_2\in(1,2)$.

Άρα υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $f(x)=\ln x$ με $0<x_1<\frac{\sqrt{3}}{3}<1<x_2<2$.

γ) Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$\Phi'(x)=\frac{(\ln x+1)(x^2+1)^2-x\ln x\,2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{x^2+1-(3x^2-1)\ln x}{(x^2+1)^3}.$$

Η $\Phi'(x)$ μηδενίζεται για $x^2 + 1 = (3x^2 + 1)\ln x$ η οποία έχει ρίζες τις ρίζες της $f(x) = \ln x$ δηλαδή τις x_1, x_2. Επειδή όμως η $g(x) = x^2 + 1 - (3x^2 + 1)\ln x$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(0, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + 1 - (3x^2 - 1)\ln x) = -\infty$ άρα $g(x) < 0$ στο $(0, x_1)$, $g(1) = 2$ άρα $g(x) > 0$ στο (x_1, x_2) και $g(2) = 5 - 11\ln 2 = 11\left(\frac{5}{11} - \ln 2\right) < 0$ άρα $g(x) < 0$ στο $(x_2, +\infty)$. Η $\Phi'(x)$ είναι ομόσημη της $g(x)$ συνεπώς έχουμε για τη Φ τον πίνακα μεταβολής της.

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$	0	↘	$\Phi(x_1)$	↗	$\Phi(x_2)$	↘	0

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(x^2+1)^2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = 1\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 1\cdot 0 = 0$

και $\lim\limits_{x\to +\infty}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x\ln x}{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^3}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}1 =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{3x^3} = 0$. Άρα το σύνολο τιμών της Φ είναι το $[\Phi(x_1), \Phi(x_2)]$.

δ) Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = 0$ άρα $\alpha = 0$ για να είναι συνεχής. Για να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ πρέπει να υπάρχει το όριο του λόγου μεταβολής σ' αυτό και να είναι πραγματικός αριθμός, αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln x}{x(x^2+1)^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(x^2+1)^2}\lim\limits_{x\to 0}\ln x = 1(-\infty) = -\infty$. Η Φ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά δέχεται εφαπτομένη στο $x_0 = 0$, εφόσον υπάρχει το όριο του λόγου μεταβολής, την ευθεία $x = 0$ δηλαδή τον $y'y$.

ΘΕΜΑ 172

√ **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$



▶

α) Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα. Είναι δυνατόν το (0, 0) να είναι σημείο καμπής;

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ οπότε αν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ θα είναι συνεχής στο IR.

Εχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\dfrac{1}{1+e^{1/x}}\right) = 0\cdot 1 = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\dfrac{1}{1+e^{1/x}}\right) = 0\cdot 0 = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{1/x}} = 0$ και εφόσον $f(0) = 0$ η f είναι συνεχής στο μηδέν άρα στο IR. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{1/x}} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{1/x}} = 0$.

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και μάλιστα δεν δέχεται εφαπτομένη σ' αυτό διότι δεν υπάρχει το όριο του λόγου μεταβολής. Συνεπώς δεν είναι σημείο καμπής το (0, 0).

β) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} = (-\infty)\dfrac{1}{2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} = (+\infty)\dfrac{1}{2} = +\infty$

και εφόσον η f είναι συνεχής στο IR το σύνολο τιμών είναι όλο το IR.

ΘΕΜΑ 173

Δίνεται η συνάρτηση $f_m(x) = e^{x-1} - mx$.

α) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_m και η θέση της ως προς αυτές.

β) Να βρείτε το m έτσι ώστε η C_m να έχει εφαπτόμενη τον x'x και για αυτή την τιμή να βρείτε και να μελετήσετε την f_m ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και πού η C_m είναι κυρτή ή κοίλη. ▶

▶ **γ) Δείξτε ότι για $m > 1$ η εξίσωση $f_m(x) = -\sqrt{m}\ln\sqrt{m}$ έχει πάντα 2 ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα εκατέρωθεν του $1 + \ln m$.**

ΛΥΣΗ

α) Το σύνολο ορισμού της f_m είναι το $\mathbb{R}$ άρα διερευνούμε την ύπαρξη ασυμπτώτων στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-1} - mx}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-1}}{x} - m =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to-\infty}e^{x-1} - m = 0\cdot 0 - m = -m$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) + mx] = \lim_{x\to-\infty}[e^{x-1} - mx + mx] = 0$$

Άρα η $y = -mx$ είναι πλάγια ασύμπτωτος στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1} - mx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{x} - m = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x-1})'}{(x)'} - m =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{1} - m = +\infty - m = +\infty.$$

Στο $+\infty$ η C_m δεν έχει ασύμπτωτο. Επειδή $f_m(x) - y = e^{x-1} - mx + mx > 0$ η C βρίσκεται ψηλότερα από την ευθεία.

β) Για να έχει η C_m εφαπτόμενη τον $x'x$ σε κάποιο x_0 πρέπει και αρκεί $f'(x_0) = 0$

και $f(x_0) = 0$ δηλαδή $\left.\begin{matrix} e^{x_0-1} - m = 0 \\ e^{x_0-1} - mx_0 = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow mx_0 = m \Leftrightarrow \begin{matrix} x_0 = 1 \\ \text{ή} \\ m = 0 \end{matrix}$.

Αν $m = 0$ τότε $e^{x_0-1} = 0$ αδύνατο, άρα $x^0 = 1$ οπότε $e^0 - m = 0 \Leftrightarrow$ **m = 1**.

Τότε η f_m γίνεται

$f(x) = e^{x-1} - x$ με $f'(x) = e^{x-1} - 1$ και $f''(x) = e^{x-1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Η $f'(x) > 0$ αν $x > 1$ και $f'(x) < 0$ αν $x < 1$ έχουμε

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f''(x)$	+		+
f(x)	$+\infty$ ↘	Ελάχιστο $f(1) = 0$	↗ $+\infty$

με $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

και ασύμπτωτο στο $-\infty$ την $y = -x$.

γ) $f_m'(x) = e^{x-1} - m$ με $f_m'(x) = 0$ για $x = 1 + \ln m$ με πίνακα μεταβολής της f_m

x	$-\infty$		$1+\ln m$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	Ελάχιστο $f_m(1+\ln m)$	↗	$+\infty$

και ελάχιστη τιμή την $f_m(1 + \ln m) = m - m(1 + \ln m) = -m\ln m$ και

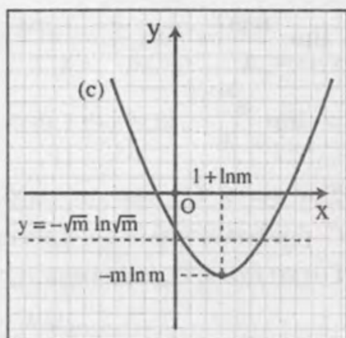
$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{x-1} - mx) = 0 + \infty = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{x-1} - mx) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x-1}}{x} - m\right)\right] \text{ με}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{x-1})'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty \text{ οπότε } \lim_{x\to+\infty} f_m(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} < m$ και $0 < \ln\sqrt{m} < \ln m$ οπότε $\sqrt{m}\ln\sqrt{m} < m\ln m$ και κατά συνέπεια $-\sqrt{m}\ln\sqrt{m} > -m\ln m$.

Άρα η ευθεία $y = -\sqrt{m}\ln\sqrt{m}$ τέμνει σε δύο σημεία τη C και μάλιστα εκατέρωθεν του $1 + \ln m$.



ΘΕΜΑ 174

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{e^x}{\sqrt{|1-2e^x|}}$.

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να δείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0 \;\; \forall\, x > -\ln 2$.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτους τις ευθείες $y = x$ και $y = \dfrac{x}{2} - \ln\sqrt{2}$ στο $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ

α) Το σύνολο ορισμού της f είναι: $A = (-\infty, -\ln 2) \cup (-\ln 2, +\infty)$

$$f(x) = \ln e^x - \ln\sqrt{|1-2e^x|} = x - \frac{1}{2}\ln|1-2e^x| = x - \frac{1}{2}\ln\sqrt{(1-2e^x)^2}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο A με $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{(1-2e^x)^2}\right)'}{\sqrt{(1-2e^x)^2}} =$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{2(1-2e^x)(-2e^x)}{2\sqrt{(1-2e^x)^2}\sqrt{(1-2e^x)^2}} =$$

$$= 1 + \frac{(1-2e^x)}{(1-2e^x)^2} = 1 + \frac{e^x}{1-2e^x} = \frac{1-e^x}{1-2e^x}$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗	‖	↘	$f(0)=0$	↗	

Έχουμε $f'(x) < 0$ για $-\ln 2 < x < 0$ και $f'(x) > 0$ για $x < -\ln 2$ ή $x > 0$.

Άρα στο $(-\infty, -\ln 2)$ είναι αυστηρά αύξουσα

στο $(-\ln 2, 0]$ είναι αυστηρά φθίνουσα

και στο $[0, +\infty)$ είναι ασυτηρά αύξουσα

Κατά συνέπεια $\forall\, x > -\ln 2$ εφόσον f(0) ελάχιστο στο διάστημα αυτό, έχουμε $f(x) \geq f(0)$ δηλ. $f(x) \geq 0$.

β) Αρκεί ν.δ.ο $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = 0$. Αλλά $f(x) - x = x - \frac{1}{2}\ln|1-2e^x| - x =$

$= -\frac{1}{2}\ln|1-2e^x|$. Όμως $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ και συνεπώς $\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln|1-2e^x|\right] = 0$.

Άρα $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = 0$. Η ευθεία $y = x$ πλάγια ασύμπτωτος στο $-\infty$.

Επίσης $f(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = x - \frac{1}{2}\ln|1-2e^x| - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 =$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln|1-2e^x|\right) = \frac{1}{2}\left[\ln e^x + \ln 2 - \ln|1-2e^x|\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2e^x}{|1-2e^x|} = \frac{1}{2}\ln\frac{2e^x}{e^x|e^{-x}-2|} = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{|e^{-x}-2|}.$$

Όμως $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{2}{|e^{-x}-2|} = 0$

Οπότε η γραφική παράσταση της f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο την

$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$.

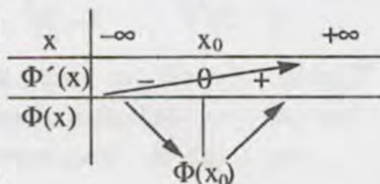
ΘΕΜΑ 175

α) Εάν f παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \lambda$, τότε κάθε ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ή θα εφάπτεται στη C_f ή θα τέμνει την C_f σε δύο σημεία ή σε κανένα (δηλαδή δεν την τέμνει ακριβώς σ' ένα σημείο).

β) Να δείξετε ότι $\forall\, m \in \mathbb{R}$ με $m \neq 0$, η εξίσωση $e^{mx} - 2mx - 1 = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρώ τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) - \lambda x - \beta$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $\Phi'(x) = f'(x) - \lambda$. Εφόσον $f(x)$ κυρτή, η $f'(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα οπότε και η $f'(x) - \lambda$ δηλαδή $\Phi'(x)$ αυστηρά αύξουσα. Αλλά $\Phi'(x_0) = f'(x_0) - \lambda = 0$ άρα για $x > x_0$ έχουμε $\Phi'(x) > \Phi'(x_0) = 0$ και για $x < x_0$ έχουμε $\Phi'(x) < \Phi'(x_0) = 0$.



Η Φ λοιπόν είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και αυστηρά αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$, παρουσιάζει δε ολικό ελάχιστο στο x_0 το $\Phi(x_0)$.

- Εάν $\Phi(x_0) > 0$ τότε $\forall\, x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\Phi(x) > 0$ ισοδύναμα $f(x) > \lambda x + \beta$. Άρα η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ δεν έχει με την C_f κανένα σημείο.
- Εάν $\Phi(x_0) = 0$ τότε $\forall\, x \neq x_0$ $\Phi(x) > 0$ συνεπώς $\Phi(x) \neq 0$ ισοδύναμα $f(x) \neq \lambda x + \beta$. Η C_f λοιπόν και η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ δεν έχουν άλλο κοινό σημείο εκτός του $(x_0, f(x_0))$, η δε $y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτόμενη στην C_f διότι $f(x_0) = \lambda x_0 + \beta$ και $f'(x_0) = \lambda$.
- Εάν $\Phi(x_0) < 0$ τότε σε κάθε διάστημα $[x, x_0]$ ή $[x_0, x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ., συνεπώς υπάρχει ξ στο (x, x_0) ή στο (x_0, x) αντίστοιχα τέτοιο ώστε $\dfrac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \Phi'(\xi) \Leftrightarrow \Phi(x) = \Phi'(\xi)\,(x - x_0) + \Phi(x_0)$, οπότε για $x < x_0$ έχουμε $\Phi'(\xi) < 0$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = +\infty$, επίσης για $x > x_0$ έχουμε

  $\Phi'(\xi) > 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = +\infty$. Άρα υπάρχουν x_1, x_2 μοναδικά με

  $x_1 < x_0 < x_2$ τέτοια ώστε $\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = 0$. Η εξίσωση λοιπόν $f(x) = \lambda x + \beta$ έχει ακριβώς 2 λύσεις και κατά συνέπεια η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ τέμνει την C_f ακριβώς σε δύο σημεία.

β) Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = e^{mx}$ και την ευθεία $y = 2mx + 1$. Η $x = 0$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης αφού $f(0) = 1$ και το σημείο $(0, 1)$ ανήκει στην ευθεία. Η εφαπτόμενη στην C_f στο $(0, 1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(0) = me^{m0} = m \neq 2m$ (αφού $m \neq 0$). Άρα η $y = 2mx + 1$ δεν είναι εφαπτόμενη στην C_f, αλλά έχει ένα κοινό σημείο το $(0, 1)$. Συνεπώς με βάση το α) ερώτημα έχει και δεύτερο.

Άρα η $e^{mx} - mx - 1 = 0$ έχει ακριβώς 2 λύσεις στο $\mathbb{R}$ $\forall\, m \neq 0$.

ΘΕΜΑ 176

Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$ με $x \neq x_0$.

Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστο στο Δ το $f(x_0)$.

ΛΥΣΗ

Από το πρόσημο της $f''(x)$ συμπεραίνουμε τη μονοτονία της $f'(x)$.

Η $f''(x)$ δεν γνωρίζουμε, αλλά ούτε μας είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε, εάν είναι συνεχής στο x_0. Έχουμε $f''(x) < 0$ $\forall\, x < x_0$ και η $f'(x)$ συνεχής στο x_0 άρα αυστηρά φθίνουσα $\forall\, x \leq x_0$. Επίσης $f''(x) < 0$ $\forall\, x > x_0$ και $f'(x)$ συνεχής στο x_0

x		x_0	
$f''(x)$	−		−
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

άρα αυστηρά φθίνουσα για $x \geq x_0$. Εφόσον λοιπόν η $f'(x)$ συνεχής στο Δ και αυστηρά φθίνουσα για $x \leq x_0$ και για $x \geq x_0$ θα είναι αυστηρά φθίνουσα στο Δ. Άρα για $x < x_0$ θα είναι $f'(x) > f'(x_0)$ δηλαδή $f'(x) > 0$ και για $x > x_0$ θα είναι $f'(x) < f(x_0)$ δηλαδή $f'(x) < 0$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα για $x < x_0$ και αυστηρά φθίνουσα για $x > x_0$ είναι και συνεχής στο x_0 άρα στο x_0 παρουσιάζει μέγιστο το $f(x_0)$.

ΘΕΜΑ 177

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = 2\ln(x + 1)$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ στο οποίο οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτόμενες.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται ακριβώς σε δύο σημεία.

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x) = g'(x)$ έχει μοναδική ρίζα θετική.

Θεωρώ τη συνάρτηση

$\Phi(x) = f(x) - g(x) = e^x - 1 - 2\ln(x + 1)$

η οποία έχει $\Phi'(x) = e^x - \dfrac{2}{x+1}$ και

x	−1	0	x_0		+∞
$\Phi''(x)$			+		
$\Phi'(x)$	−∞ ↗	−	0	+ ↗	+∞

$\Phi''(x) = e^x + \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0, \ \forall x > -1$. Έχουμε $\lim\limits_{x \to -1} \Phi'(x) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi'(x) = +\infty$ άρα με βάση το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $\Phi'(x) = 0$ και εφόσον $\Phi''(x) > 0$ δηλαδή η Φ' αυστηρά αύξουσα θα υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της $\Phi'(x) = 0$ έστω x_0.

Κατά συνέπεια $\forall x \in (-1, x_0)$ θα είναι $\Phi'(x) < 0$ και $\forall x > x_0$ θα είναι $\Phi'(x) > 0$. $\Phi'(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ άρα $x_0 > 0$.

Υπάρχει λοιπόν μοναδικό $x_0 > 0$ για το οποίο $f'(x_0) = g'(x_0)$ και οι εφαπτόμενες εκεί είναι παράλληλες.

β) Εφόσον $\Phi'(x) < 0$ στο $(-1, x_0)$ και $\Phi'(x) > 0$ στο $(x_0, +\infty)$ η Φ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(-1, x_0]$ και αυστηρά αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$, στο x_0 παρουσιάζει ελάχιστο το $\Phi(x_0) < \Phi(0) = 0$. Έχουμε λοιπόν στο $(-1, x_0)$ μοναδική ρίζα της $\Phi(x) = 0$, το μηδέν.

x	−1	0	x_0	x_1	+∞
$\Phi'(x)$	−∞ −		0 +	↗	+∞
$\Phi(x)$	↘	0 ↘	$\Phi(x_0)$	↗ 0 ↗	

Το $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1 - 2\ln(x + 1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^x \left(1 - \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{2\ln(x+1)}{e^x} \right) \right]$

με $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln(x+1)}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{2}{x+1}}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x(x+1)} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$ οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty \cdot 1 = +\infty$.

Άρα με βάση το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και εφόσον είναι αυστηρά αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της $\Phi(x) = 0$ έστω $x_1 > x_0$.

Άρα οι C_g και C_f έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

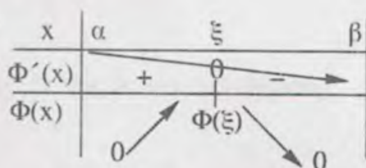
ΘΕΜΑ 178

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$. Η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ ενώ η g κοίλη σ' αυτό και $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f(\beta) = g(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο οι εφαπτόμενες στην C_f και C_g είναι παράλληλες. Παρατηρείστε ότι σ' αυτό το ξ η κατακόρυφη απόσταση γίνεται μέγιστη.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = g(x) - f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\Phi(\alpha) = g(\alpha) - f(\alpha) = 0$ και $\Phi(\beta) = g(\beta) - f(\beta) = 0$. Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της $\Phi'(x) = 0$ στο (α, β). Αλλά $\Phi'(x) = g'(x) - f'(x)$ αυστηρά φθίνουσα αφού $f'(x)$ αυστηρά αύξουσα και $g'(x)$ αυστηρά φθίνουσα.

Άρα η εξίσωση $\Phi'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (α, β) ισοδύναμα υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = g'(\xi)$ συνεπώς οι εφαπτόμενες στο ξ στις C_g και C_f είναι παράλληλες.

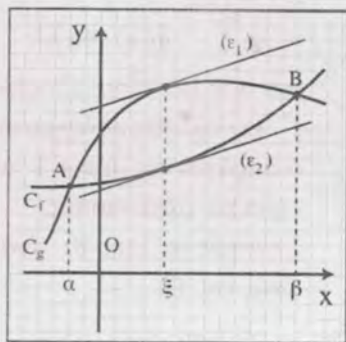


● Εφόσον η $\Phi'(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα και $\Phi'(\xi) = 0$ θα είναι

$\Phi'(x) > 0$ αν $\alpha < x < \xi$ και

$\Phi'(x) < 0$ αν $\xi < x < \beta$.

Άρα η $\Phi(x)$ αυστηρά αύξουσα στο $[\alpha, \xi]$ και αυστηρά φθίνουσα στο $[\xi, \beta]$ συνεπώς παρουσιάζει μέγιστο στο ξ το $\Phi(\xi) = g(\xi) - f(\xi)$. Δηλαδή η διαφορά $\Phi(x) = g(x) - f(x)$, που σημειωτέον είναι πάντα θετική αφού $\Phi(\alpha)=\Phi(\beta)= 0$ είναι το ελάχιστο της $\Phi(x)$, γίνεται μέγιστη όταν οι εφαπτόμενες στις C_f, C_g είναι παράλληλες.



ΘΕΜΑ 179

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \dfrac{\beta}{\ln x}$.

▶

▶ i) Εάν η C_f διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ ν.δ.ο. το σημείο αυτό είναι σημείο καμπής της C_f.

ii) Εάν $f(e^2) = 3/2$ ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = \varkappa$ έχει δύο λύσεις με γινόμενο $e^{\varkappa}$.

iii) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες στην C_f στα σημεία που έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ τέμνονται στον y'y.

ΛΥΣΗ

i) Η f έχει σύνολο ορισμού $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Έχουμε

$f(1/e) = 0 \Leftrightarrow -\alpha - \beta = 0$ δηλαδή $\beta = -\alpha$ και η f(x) γίνεται $f(x) = \alpha\left(\ln x - \frac{1}{\ln x}\right)$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο A με $f'(x) = \frac{\alpha}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln^2 x}\right)$ και η f΄ παραγωγίσιμη στο A με $f''(x) = -\frac{\alpha}{x^2}\left(1 + \frac{1}{\ln^2 x}\right) + \frac{\alpha}{x}\,\frac{-2\frac{1}{x}}{\ln^3 x} =$

$$= -\frac{\alpha}{x^2}\left(1 + \frac{1}{\ln^2 x} + \frac{2}{\ln^3 x}\right) = -\frac{\alpha}{x^2}\,\frac{\ln^3 x + \ln x + 2}{\ln^3 x} = -\frac{\alpha}{x^2}\,\frac{(\ln x+1)(\ln^2 x-\ln x+2)}{\ln^3 x}.$$

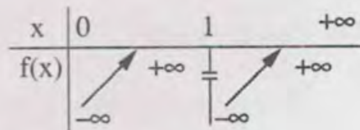
για $x = 1/e$ είναι $f''(1/e) = 0$ και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο 1/e αφού ο παράγοντας $\ln x + 1$ αλλάζει πρόσημο και μόνον αυτός.
Συνεπώς το (1/e, 0) είναι σημείο καμπής της C_f.

> η εξίσωση $\omega^3 + \omega + 2 = 0$ έχει ρίζα την $\omega = -1$ και με τη βοήθεια του σχήματος Horner γίνεται $\omega^3 + \omega + 2 = (\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 2)$ το δε τριώνυμο $\omega^2 - \omega + 2 > 0$ για κάθε ω.

ii) Εάν $f(e^2) = \frac{3}{2}$ τότε $\alpha\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha = 1$ οπότε η

$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$. Μελετούμε την f στα άκρα γνωρίζοντας ήδη

$f'(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln^2 x}\right) > 0 \ \forall x \in A$



$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

και $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Άρα η f(x) διατρέχει το ℝ για $x \in (0, 1)$ και για $x \in (1, +\infty)$,

όντας αυστηρώς αύξουσα στο καθένα διάστημα. Άρα υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες της $f(x)=\kappa$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$. Η $f(x)=\kappa$ ισοδυναμεί με την $\ln^2 x - \kappa \ln x - 1 = 0$ και οι ρίζες της $\omega^2 - \kappa\omega - 1 = 0$ έχουν άθροισμα κ δηλαδή $\ln x_1 + \ln x_2 = \kappa$ $\Leftrightarrow \ln(x_1 + x_2) = \kappa \Leftrightarrow x_1 + x_2 = e^{\kappa}$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$.

iii) $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x - \dfrac{1}{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$ ή $\ln x = -1$ συνεπώς

$x_1 = \dfrac{1}{e}$ και $x_2 = e$ οι ρίζες της εξίσωσης. Η εφαπτόμενη στο $x_1 = \dfrac{1}{e}$ είναι:

$y - f\left(\dfrac{1}{e}\right) = f'\left(\dfrac{1}{e}\right)\left(x - \dfrac{1}{e}\right) \Leftrightarrow y = 2e\left(x - \dfrac{1}{e}\right)$ διότι $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$ και $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 2e$

συνεπώς $y = 2ex - 2$. Όμοια στο $x_2 = e$ η εφαπτόμενη είναι:

$y - f(e) = f'(e)\,(x - e) \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{e}(x - e)$ διότι $f(e) = 0$ και $f'(e) = \dfrac{2}{e}$ άρα

$y = \dfrac{2}{e}x - 2$. Έχουμε λοιπόν $y = 2e\left(x - \dfrac{1}{e}\right)$ και $y = \dfrac{2}{e}(x - e)$ και ισοδύναμα $y = 2ex - 2$ και $y = \dfrac{2}{e}x - 2$ οι οποίες διέρχονται από το $(0, -2)$ δηλαδή οι εφαπτόμενες τέμνονται πάνω στον $x'x$.

ΘΕΜΑ 180

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^x$ και $g(x) = \beta + \alpha \ln x$ με $x > 0$.

α) Να βρεθούν τα α και β έτσι ώστε να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$.

β) Για τις τιμές των α, β που θα βρείτε να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ $\forall x > 0$.

ΛΥΣΗ

α) Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ πρέπει και αρκεί $f(1) = g(1)$ και $f'(1) = g'(1)$ (Σ) (f, g παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$).

Έχουμε $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$ και $g'(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $x > 0$.

Οπότε το σύστημα εξισώσεων (Σ) γίνεται

$$\left.\begin{aligned} \beta + \alpha \ln 1 &= 1^1 \\ \frac{\alpha}{1} &= 1^1(1 + \ln 1) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \beta &= 1 \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

β) Για την $f'(x)$ έχουμε

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

$$f'(x)<0 \text{ για } 0<x<\frac{1}{e}$$

και για $f'(x)>0$ για $x>\frac{1}{e}$

x	0		1		+∞
f′(x)		−	0	+	
f′′(x)		+	|	+	
f(x)	1	↘	$f(1/e)=(1/e)^{1/e}$	↗	+∞

η f' παραγωγίσιμη με $f''(x)=x^x(\ln x+1)^2+x^x\frac{1}{x}=x^x\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right]>0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ διότι $x^x=e^{x\ln x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

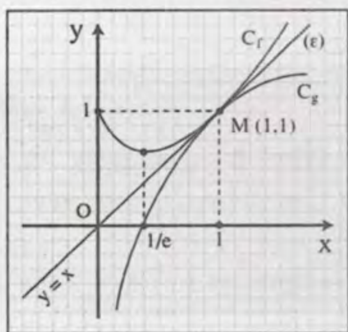
Για την $g'(x)$ έχουμε

$g'(x)=\frac{1}{x}>0$ και

$g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

x	0	+∞
g′(x)		+
g′′(x)		−
g(x)	−∞ ↗	+∞

Η δε γραφική τους παράσταση είναι



Η κοινή τους εφαπτομένη είναι

ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y=x.$

Στο σημείο $M(1,1)$ και C_f τα κοίλα άνω ενώ C_g τα κοίλα κάτω άρα

$f(x)=x^x \geq x \geq 1+\ln x=g(x)$ άρα

$f(x)\geq g(x)\ \ \forall\, x\in \mathbb{R}.$

ΘΕΜΑ 181

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=(x+2)^2+\ln x^2$ τέμνει για κάθε $\varkappa \in \mathbb{R}$, ακριβώς σ' ένα σημείο την ημιευθεία

$$\{y=\varkappa x+4 \text{ με } x>0\}$$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $(x+2)^2+\ln x^2=\varkappa x+4$ έχει $\forall\, \varkappa\in\mathbb{R}$, ακριβώς μία λύση στο $(0,+\infty)$, και εφόσον $x>0$ είναι $\ln x^2=2\ln x$ οπότε έχουμε

> Απομονώνουμε την παράμετρο $\varkappa \in \mathbb{R}$ και το πρόβλημα γίνεται απλούστερο. Ζητάμε ισοδύναμα η ευθεία $y=\varkappa$ να τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο τη γραφική παράσταση της $x+4+2\dfrac{\ln x}{x}$.

$x^2+4x+4+2\ln x=\varkappa x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4x+2\ln x=\varkappa x \Leftrightarrow x+4+2\dfrac{\ln x}{x}=\varkappa$.

Θέτουμε $\Phi(x)=x+4+2\dfrac{\ln x}{x}$ την οποία και μελετάμε ως προς τη μονοτονία και το σύνολο τιμών διότι τελικά το ζητούμενο είναι η $\Phi(x)$ να παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές ($\varkappa \in \mathbb{R}$) ακριβώς μία φορά.

Έχουμε $\Phi'(x)=1+2\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2+2-2\ln x}{x^2}$. Το πρόσημο της $\Phi'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της $g(x)=x^2+2-2\ln x$ και

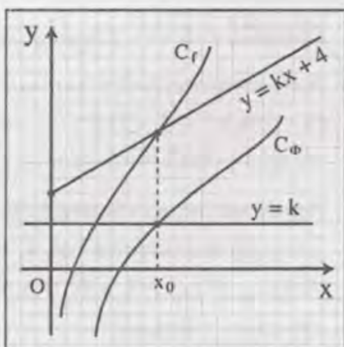
$g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=2\dfrac{x^2-1}{x}$.

x	0		1		+∞
g´(x)		−	0	+	
g(x)		+ ↘	③	↗ +	
Φ´(x)		+		+	
Φ(x)	−∞	↗			+∞

Η $g'(x)>0$ $\forall x>1$ άρα η g αυστηρώς αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και $g'(x)<0$ εάν $0<x<1$ οπότε η g αυστηρώς φθίνουσα στο $(0,1]$. Παρουσιάζει ελάχιστο δε στο $x_0=1$ το $g(1)=3$ κατά συνέπεια $g(x)\geq 3>0$ $\forall x>0$ και εφόσον η $\Phi'(x)$ είναι ομόσημη της $g(x)$ έχουμε $\Phi'(x)>0$ $\forall x>0$ άρα η $\Phi(x)$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+4+2\dfrac{\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+4+\dfrac{2}{x}\ln x\right)=0+4+(+\infty)(-\infty)=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to +\infty}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+4+\dfrac{2}{x}\ln x\right)=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1/x}{1}=0$



Άρα η Φ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ (διότι είναι συνεχής) και είναι αυστηρώς αύξουσα συνεπώς παίρνει όλες τις τιμές του $\mathbb{R}$ ακριβώς μία φορά. Η εξίσωση λοιπόν $x+4+2\dfrac{\ln x}{x}=\varkappa$ έχει στο $(0,+\infty)$ ακριβώς μία λύση $\forall \varkappa \in \mathbb{R}$ απ' όπου προκύπτει ισοδύναμα ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=(x+2)^2+\ln x^2$ τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο την ευθεία $y=\varkappa x+4$ στο $(0,+\infty)$ $\forall \varkappa \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 182

Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x) = \ln g(x)$ με $g(x) = xf'(x)$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 0$.

α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f'(x)$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(1 - \ln x)e^{\alpha} = 1$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

γ) Αν $\Phi(x) = x(\kappa - \ln x)$ και $\Phi(x) \leq \kappa$ $\forall x \in (0, e)$ να δείξετε ότι $\kappa = 1$.

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η f θα πρέπει η g(x) να είναι θετική και επειδή $x > 0$ θα έχουμε και $f'(x) > 0$. Έχουμε $f(x) = \ln g(x) = \ln(xf'(x))$ ή $e^{f(x)} = xf'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-f(x)}f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -e^{-f(x)}f'(x) + \frac{1}{x} = 0$ και $(e^{-f(x)} + \ln x)' = 0$ από την

οποία συμπεραίνουμε ότι $e^{-f(x)} + \ln x = c$, c σταθερά.

Για $x = 1$ γίνεται $e^{-f(1)} + \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα η f(x) επαληθεύει την ισότητα $e^{-f(x)} + \ln x = 1$ $\forall x > 0$ ή $e^{-f(x)} = 1 - \ln x$ ισοδύναμα $-f(x) = \ln(1 - \ln x)$ με $0 < x < e$, $f(x) = -\ln(1 - \ln x) = \ln\frac{1}{1 - \ln x}$. Εφόσον $f(x) = \ln g(x)$ θα είναι

$g(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$ και $f'(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$, $0 < x < e$.

Παραγωγίζοντας την $f'(x)$ παίρνουμε

$f''(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$ για την οποία έχουμε $f''(1) = 0$

$f''(x) < 0$ για $0 < x < 1$ και

$f''(x) > 0$ για $1 < x < e$.

x	0	1	e
$f''(x)$	−	0	+
$f'(x)$	↘	ΕΛΑΧΙΣΤΟ $f'(1) = 1$	↗

Συνεπώς η $f'(x)$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο 1 την $f'(1) = 1$.

β) Απομονώνουμε την παράμετρο α

$(1 - \ln x)e^{\alpha} = 1$ (1) $\Leftrightarrow 1 - \ln x = e^{-\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = -\alpha$ ή $\alpha = -\ln(1 - \ln x)$.

Θα πρέπει βέβαια από την (1) $1 - \ln x > 0$ δηλαδή $0 < x < e$.

Αρκεί να διερευνήσουμε σε πόσα σημεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f, την C_f, η ευθεία $y = \alpha$. Αλλά η $f'(x) \geq 1 > 0$ $\forall x \in (0, e)$ κατά συνέπεια στο (0, e). Επίσης

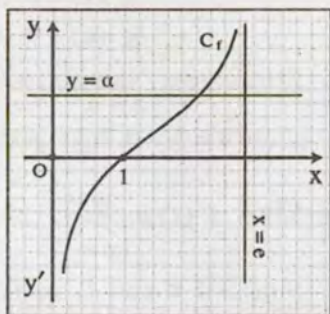
x	0	1	e
$f'(x)$	− ↘	1	↗ +
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to e} f(x) = +\infty$.

Η f(x) λοιπόν είναι αυστηρά αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το IR, συνεπώς την κάθε τιμή την παίρνει ακριβώς μία φορά.

αν $x \to 0^+ \Rightarrow \ln x \to -\infty \Rightarrow 1 - \ln x \to +\infty$
$\Rightarrow \ln(1-\ln x) \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$
αν $x \to e^- \Rightarrow \ln x \to 1 \Rightarrow 1 - \ln x \to 0$
$\Rightarrow \ln(1-\ln x) \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

Άρα η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f(x) ακριβώς σ' ένα σημείο $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ δηλαδή η εξίσωση $(1 - \ln x)e^{\alpha} = 1$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, e)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.



γ) Θέτοντας στην $\Phi(x) = x(\kappa - \ln x)$ την τιμή $x = 1$ έχουμε $\Phi(1) = \kappa$, άρα η σχέση $\Phi(x) \leq \kappa$ $\forall x \in (0, e)$ γίνεται $\Phi(x) \leq \Phi(1)$ $\forall x \in (0, e)$.

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του (0,e) και παρουσιάζει μέγιστο σ' αυτό, δηλαδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Fermat, άρα $\Phi'(1) = 0$. Αλλά $\Phi'(x) = \kappa - \ln x + x\left(-\frac{1}{x}\right) = \kappa - 1 - \ln x$, οπότε η $\Phi'(1) = 0$ γίνεται $\kappa - 1 - \ln 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

ΘΕΜΑ 183

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g: $(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = x + 2\frac{\ln(1+x)}{1+x} \ (x > -1) \text{ και } g(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1) \ (x > -1)$$

α) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της g(x) για $x > -1$

β) Να μελετήσετε τη μεταβολή της f στο διάστημα $(-1, +\infty)$ και να βρείτε τα όρια $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι το διάγραμμα (γ) της f έχει για $x \to +\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία (η) με εξίσωση $y = x$. Να βρείτε τη θέση του διαγράμματος ως προς την ασύμπτωτο αυτή για $x \to +\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα και μόνο σημείο P του διαγράμματος (γ) στο οποίο έχει αυτό εφαπτόμενη (T) παράλληλη προς την (η).

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη (T_1) του (γ) στην αρχή O(0, 0) και να διευκρινίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = x + m$ (1) για $m \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $g'(x) = 2(x-1) - 2\dfrac{1}{x+1} = 2\dfrac{(x+1)^2 - 1}{x+1} = \dfrac{2x(x+2)}{x+1}$ $\forall\, x > -1$.

Είναι λοιπόν $g'(x) = 0$ για $x = 0$

$g'(x) < 0$ για $-1 < x < 0$

$g'(x) > 0$ για $x > 0$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Είναι επίσης $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 2 - 2(-\infty) = +\infty$. Η g έχει ελάχιστο για $x = 0$ ίσο με $g(0) = 3 > 0$. Άρα $g(x) \geq 3 > 0$ για $x > -1$.

β) Είναι $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ $\forall\, x > -1$ άρα λοιπόν $f'(x) > 0$ $\forall\, x > -1$, αφού $g(x) > 0$ για $x > -1$. Η f είναι αυστηρώς αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

● $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1}\left(x + 2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right) = -1 + 2(-\infty)(+\infty) = -\infty$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x+1}{1} = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + 2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right) = +\infty + 2\cdot 0 = +\infty$. Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

γ) ● Για $x \to +\infty$ έχουμε $\ln(1+x) > 0$ και $2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} > 0$ άρα $x + 2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} > x$ και επομένως $f(x) > x$. Συνεπώς το διάγραμμα (γ) της f βρίσκεται ψηλότερα της ασυμπτώτου με εξίσωση $y = x$.

● Εφόσον η (Τ) ζητάμε να είναι παράλληλη στην (η) πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσής της να είναι ένα. Άρα η τετμημένη στο P(x, y) πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση $f'(x) = 1$ ισοδύναμα $\dfrac{g(x)}{(x+1)^2} = 1$ δηλαδή

$(x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1) = (x+1)^2$ ή $\ln(x+1) = 1$ η οποία επαληθεύεται μόνο για $x = e - 1$. Άρα $P(e-1, f(e-1))$ δηλαδή $P\left(e-1, e-1+\dfrac{2}{e}\right)$.

δ) ● Η εφαπτόμενη στο (0, 0) έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ αλλά $f(0) = 0$ και $f'(0) = g(0) = 3$. Συνεπώς η (T_1) έχει εξίσωση $y = 3x$.

● Αρκεί να διερευνήσουμε την εξίσωση $f(x) - x = m$ ισοδύναμα την $2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = m$ (2)

Εάν $h(x) = 2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ αρκεί να βρούμε σε

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$2/e$	↘	0
			max = $2/e$		

πόσα σημεία η ευθεία $y = m$ τέμνει το διάγραμμα (c) της $h(x)$. Προς τούτο αρκεί να μελετήσουμε τη μεταβολή της $h(x)$. Είναι $h'(x) = 2\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ η οποία μηδενίζεται για $x = e-1$, είναι θετική αν $-1 < x < e-1$ και αρνητική για $x > e-1$. Συνεπώς η $h(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(-1, e-1]$ και αυστηρά φθίνουσα στο $[e-1, +\infty)$, παρουσιάζει μέγιστο στο $e-1$ το $h(e-1) = \dfrac{2}{e}$.

Για να βρούμε όμως τις τιμές της $h(x)$ πρέπει να βρούμε και τα

$\lim\limits_{x\to -1} h(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{1+x} = +\infty$ άρα

$\lim\limits_{x\to -1} h(x) = -\infty$ (άρα η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος της (c))

Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty} 2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 2\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = 2\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 2\cdot 0 = 0$

δηλαδή $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 0$ (άρα η $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτος της (c)).

Κάνουμε το διάγραμμα (c) της $f(x)$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2) άρα και η (1)

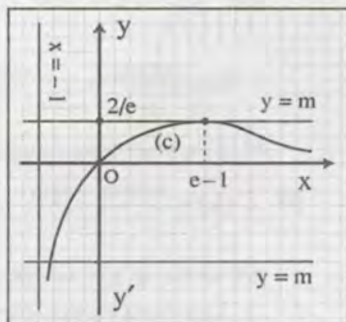
για $\mathbf{m > 2/e}$ είναι **αδύνατη**

για $\mathbf{m = 2/e}$ έχει **μία** λύση την $x = e-1$

για $\mathbf{0 < m < 2/e}$ έχει **δύο** λύσεις x_1, x_2 με $0 < x_1 < e-1 < x_2$

για $\mathbf{m = 0}$ έχει **μία** λύση την $x = 0$

για $\mathbf{m < 0}$ έχει **μία** λύση x_0 με $-1 < x_0 < 0$.



ΘΕΜΑ 184

Α. α) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{ημx}{x}, & 0<x\leq\pi \\ 1, & x=0 \end{cases}$ ως προς τη συνέχεια, την παραγωγισιμότητα και τη συνέχεια της πρώτης παραγώγου

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$: η $g(x)=x^2ημx+2xσυνx-2ημx$ να είναι θετική στο $(0, x_0)$ και αρνητική στο $(x_0, \pi]$.

β) Να δείξετε ότι η f(x) έχει ένα σημείο καμπής το $(x_0, f(x_0))$ με $\frac{\pi}{2}<x_0<\pi$.

ΛΥΣΗ

Α. α) Επειδή η f συνεχής στο $(0, \pi]$ και $\lim\limits_{x\to0}\frac{ημx}{x}=1$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{ημx}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{ημx-x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{συνx-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-ημx}{2}=0$ άρα η f παραγωγίσιμη στο μηδέν με $f'(0)=0$. Για $0<x\leq\pi$ έχουμε

$f'(x)=\frac{xσυνx-ημx}{x^2}$. Άρα $f'(x)=\begin{cases} \frac{xσυνx-ημx}{x^2}, & 0<x\leq\pi \\ 0, & αν\ x=0 \end{cases}$

και $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{xσυνx-ημx}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{συνx-xημx-συνx}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-xημx}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-ημx}{2}=0$ οπότε η f΄ συνεχής στο $[0, \pi]$.

Η f λοιπόν παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[0, \pi]$.

β) $f'(x)=\frac{xσυνx-ημx}{x^2}$ για $0<x\leq2\pi$.

x	0		π
φ΄(x)		–	
φ(x)	0	↘ –	–π
f΄(x)		–	
f(x)	1	↘	0

Θέτουμε φ(x)= xσυνx– ημx με $x\in[0, \pi]$ οπότε φ΄(x)=συνx–xημx–συνx=–xημx<0 $\forall x\in(0,\pi)$ άρα η φ(x) αυστηρά φθίνουσα και φ(0)=0 οπότε $φ(x)<0\ \forall\ x\in(0, \pi]$. Αλλά η f΄(x) είναι ομόσημη της φ(x) συνεπώς $f'(x)<0\ \ \forall\ x\in(0, \pi]$

και επομένως f(x) αυστηρά φθίνουσα στο $[0, \pi]$ με μέγιστη τιμή την $f(0) = 1$ και ελάχιστη τιμή την $f(\pi) = 0$.

Β. **α)** Η g ορίζεται στο $[0, \pi]$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$g'(x) = 2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu x - 2x\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x = x^2\sigma\upsilon\nu x$ άρα

$g'(x) > 0$ αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και

$g'(x) < 0$ αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ με

$g'(0) = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

x	0		π/2		x_0		π
g′(x)		+	0			−	
g(x)	0	↗	+	↘	0	↘	−2π
			g(π/2)>0				

Επομένως η g(x) είναι αυστηρά αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και αυστηρά φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ με $g(0) = 0$ οπότε $g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ και εφόσον $g(\pi) = -2\pi < 0$ από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\pi/2, \pi)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ και επειδή είναι αυστηρά φθίνουσα στο $[\pi/2, \pi]$ ακριβώς ένα. Άρα η $g(x) > 0\ \forall x \in (0, x_0)$ και $g(x) < 0\ \forall x \in (x_0, \pi]$.

β) Η f(x) έχει δεύτερη παράγωγο στο $(0,\pi)$ και μάλιστα

Σημ. στα άκρα δεν μας ενδιαφέρει αν έχει ή όχι.

$$f''(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)x^2 - 2x(x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x}{x^3} = -\frac{g(x)}{x^3}$$

Άρα η $f''(x)$ είναι ετερόσημη της g(x) οπότε $f''(x) < 0$ για $0 < x < x_0$

x	0	π/2	x_0	π
g(x)		+	0	−
f′′(x)		−	0	+
f(x)		∩	σ.κ.	∪

και $f''(x) > 0$ για $x_0 < x < \pi$ και $f''(x_0) = 0$ άρα η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(x_0, f(x_0))$ με $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$.

ΘΕΜΑ 185

Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όπου $A = [0, +\infty)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο A και $f(x) \geq f'(x) \geq e^x$ (1) για κάθε $x \in A$ τότε

α) Να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f'(x)$ δεν έχει ασύμπτωτες ευθείες.

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) διαιρώντας με x^2 παίρνουμε $\frac{e^x}{x^2} \le \frac{f(x)}{x^2}$.

Έχουμε $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$.

Άρα και η $\frac{f(x)}{x^2} \to +\infty$.

β) ● Θα αποδείξουμε πρώτα ότι δεν έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ (πλάγια ή οριζόντια).

Αρκεί γιαυτό να δείξουμε ότι $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{x}$ δεν είναι πραγματικός.

Από την (1) διαιρώντας με $x > 0$ έχουμε $\frac{f'(x)}{x} \ge \frac{e^x}{x}$ και

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ άρα και $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{x} = +\infty$ και συνεπώς η $f'(x)$ δεν ασύμπτωτο στο $+\infty$.

● Για να έχει η $f'(x)$ ασύμπτωτο στο $x_0 = 0$ θα πρέπει το $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

(αφού $\forall x \ge 0$ $e^x \le f'(x)$ αν έχει όριο η $f'(x)$ θα είναι θετικό).

Αλλά $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ διότι η f συνεχής, αφού είναι παραγωγίσιμη

$\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$. Άρα $1 \le \lim_{x \to 0} f'(x) \le f(0)$ οπότε $\lim_{x \to 0} f'(x) \ne +\infty$.

Συνεπώς η $f'(x)$ δεν έχει ούτε κατακόρυφη ασύμπτωτο.

ΘΕΜΑ 186

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x \ln x} & \text{για κάθε } x > 0 \text{ με } x \ne 1 \\ 2 & \text{για } x = 1 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής $\forall x > 0$

β) Να δείξετε ότι $\forall x > 0$ με $x \ne 1$ είναι

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{(x \ln x)^2} g(x) \text{ όπου } g(x) = \ln x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

►

▶

γ) Να μελετήσετε τη μεταβολή της συνάρτησης g για x > 0, και να βρείτε το πρόσημο των τιμών g(x). Να συμπεράνετε τη μονοτονία και τα ενδεχόμενα ακρότατα της συνάρτησης f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$, η f είναι συνεχής αφού είναι τότε πηλίκο συνεχών συναρτήσεων με παρονομαστή $\neq 0$. Για τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 1$, θα βρούμε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Έχουμε λοιπόν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x\ln x}$.

Παρουσιάζεται αοριστία $\dfrac{0}{0}$, οπότε, με τον κανόνα του Hospital βρίσκουμε

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{1+\ln x} = 2 = f(1)$. Η f είναι λοιπόν συνεχής και για $x = 1$, άρα συνεχής για κάθε $x > 0$.

β) Για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{2x^2\ln x - (x^2-1)(1+\ln x)}{(x\ln x)^2} = \frac{(x^2+1)\ln x - (x^2-1)}{(x\ln x)^2} = \frac{x^2+1}{(x\ln x)^2}\left(\ln x - \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Είναι λοιπόν $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{(x\ln x)^2} g(x)\ \forall\, x > 0$ με $x \neq 1$, όπου $g(x) = \ln x - \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

γ) Η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \ln x - \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ ορίζεται για κάθε $x > 0$ και έχουμε

$g'(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}\ \forall\, x > 0$. Η g(x) είναι λοιπόν αυστηρώς αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ και αφού $g(1) = 0$, θα είναι $g(x) < 0$ για $0 < x < 1$ και $g(x) > 0$ για $x > 1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(x) < 0$ για $0 < x < 1$ και $f(x) > 0$ για $x > 1$, ώστε η f είναι αυστηρώς φθίνουσα για $0 < x \leq 1$ και αυστηρώς αύξουσα για $1 \leq x < +\infty$ (αφού είναι συνεχής για $x = 1$).

Ο πίνακας μεταβολής της f ως προς τη μονοτονία είναι ο επόμενος

x	0		1		+∞
f´(x)		–	‖	–	
f(x)	+∞	↘	$f_{min} = 2$	↗	+∞

Είναι επίσης $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 187

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha + x}{1 - \beta x}$ με α, β θετικούς πραγματικούς.

α) Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η f να είναι περιττή

β) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία - κυρτότητα - ασυμπτώτους.

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι η f περιττή πρέπει το σύνολο ορισμού της να είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν και για κάθε x που ανήκει σ' αυτό να ισχύει $f(-x) = -f(x)$. Για να ορίζεται η f πρέπει $\frac{\alpha + x}{1 - \beta x} > 0$ και αυτό συμβαίνει όταν $-\alpha < x < \frac{1}{\beta}$

και για να είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν πρέπει να ισχύει $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

Επίσης $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha - x}{1 + \beta x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha + x}{1 - \beta x} \Leftrightarrow (\alpha - x)(\alpha + x) =$ $(1 - \beta x)(1 + \beta x) \Leftrightarrow \alpha^2 - x^2 = 1 - \beta^2 x^2 \ \forall x \in (-\alpha, \alpha)$ και εφόσον α, β θετικά $\alpha = \beta = 1$ που επαληθεύουν και την $\alpha = \frac{1}{\beta}$. Άρα $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{1 - x}$ με σύνολο ορισμού το $(-1, 1)$.

β) $f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1 - x}{1 + x}\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right)' = \frac{1}{1 - x^2} > 0$ άρα η f αυστηρά αύξουσα στο σύνολο της και εφόσον $f''(x) = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$, η $f''(x)$ ομόσημη του x κατά συνέπεια κοίλη στο $(-1, 0]$ και κυρτή στο $[0, 1)$ το δε σημείο $(0, 0)$ είναι σημείο καμπής.

x	−1		0		1
f′(x)		+		+	
f′′(x)		−	0	+	
f(x)	−∞	↗	σ.κ. (0, 0)	↗	+∞

Επίσης $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, η $x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτος

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, η $x = 1$ κατακόρυφη ασύμπτωτος

ΘΕΜΑ 188

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να είναι $|f(0)| \neq |g(0)|$ καθώς επίσης και $f'(t) = g(t)$ και $g'(t) = f(t)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο M(x, y) με συντεταγμένες $x = f(t)$ και $y = g(t)$ κινείται για $t \in \mathbb{R}$ σε ισοσκελή υπερβολή με άξονες συμμετρίας τους άξονες συντεταγμένων. Ποιες οι εστίες αυτής της υπερβολής;

β) Τι συμβαίνει όταν είναι $f(0) = 1$ και $g(0) = 0$;

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\frac{d}{dt}\left[f^2(t) - g^2(t)\right] = 2f(t)f'(t) - 2g(t)g'(t) = 2f(t)g(t) - 2g(t)f(t) = 0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$

Θα είναι λοιπόν $f^2(t) - g^2(t) = c$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ όπου c = σταθερά.

Συμπεραίνουμε επίσης ότι $c = f^2(0) - g^2(0) \neq 0$ αφού είναι $|f(0)| \neq |g(0)|$.

Για τις συντεταγμένες $x = f(t)$ και $y = g(t)$ του σημείου M(x, y) θα είναι λοιπόν $x^2 - y^2 = c$ με $c \neq 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1) **$c > 0$** τότε η εξίσωση $x^2 - y^2 = c$ γίνεται $\frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{c})^2} = 1$ και είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής με εστίες $E(\sqrt{2c}, 0)$, $E'(-\sqrt{2c}, 0)$ και άξονες συμμετρίας x΄x και y΄y.

2) **$c < 0$** τότε $c = -\delta$ με $\delta > 0$. Η εξίσωση γίνεται $x^2 - y^2 = -\delta$ δηλαδή $\frac{x^2}{(\sqrt{\delta})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{\delta})^2} = -1$ και είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής με εστίες $E(0, \sqrt{2\delta})$, $E'(0, -\sqrt{2\delta})$ στον άξονα y΄y.

β) Αν $f(0) = 1$ και $g(0) = 0$ η εξίσωση της υπερβολής γίνεται $x^2 - y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ 189

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $[0, \pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \ln(1 + \text{συν}x) - \ln 2 \quad \text{για} \quad 0 \leq x < \pi.$$

Να μελετήσετε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου $f''(x)$ για $0 \leq x < \pi$ και να συμπεράνετε τη μονοτονία της f. ►

▶

β) Να δείξετε ότι $\forall x \in (0, \pi)$ ισχύει η ανισότητα

$$\ln(1 + συνx) < -\frac{x^2}{4} + \ln 2$$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε για $0 \leq x < \pi$ $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{ημx}{1 + συνx}$ καθώς και

$$f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{συνx(1 + συνx) + ημ^2x}{(1 + συνx)^2} \quad \forall x \in [0, \pi) \text{ δηλαδή}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + συνx} = \frac{συνx - 1}{2(1 + συνx)} \text{ για } 0 \leq x < \pi.$$

Βρίσκουμε λοιπόν $f''(0) = 0$ και $f''(x) < 0$ για $0 < x < \pi$, οπότε η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ είναι αυστηρώς φθίνουσα συνάρτηση στο $[0, \pi)$.

Είναι όμως $f'(0) = 0$, άρα λοιπόν $f'(x) < 0$ για $0 < x < \pi$.

Η f είναι αυστηρώς φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi)$.

β) Θα είναι $f(0) > f(x)$ $\forall x \in (0, \pi)$, οπότε

$$0 > \frac{x^2}{4} + \ln(1 + συνx) - \ln 2 \text{ για } 0 < x < \pi \text{ και τελικά}$$

$$\ln(1 + συνx) < -\frac{x^2}{4} + \ln 2 \text{ για } 0 < x < \pi.$$

ΘΕΜΑ 190

α) Να βρεθούν οι άλλες πλευρές του τριγώνου όταν η περίμετρος είναι 40 m, η μία πλευρά $α = 10$ m και έχει μέγιστο εμβαδό.

β) Απ' όλους τους κώνους με σταθερή γενέτειρα λ να βρεθεί εκείνος που έχει τον μέγιστο όγκο.

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο του Ήρωνα δίνεται το εμβαδό του τριγώνου συναρτήσει των πλευρών $ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$ όπου τ είναι η ημιπερίμετρος.

Είναι λοιπόν $τ = 20$ m και $β + γ = 40 - α = 30$ m άρα $β = 30 - γ$.

Έχουμε λοιπόν $ε(γ) = \sqrt{20 \cdot 10[20-(30-γ)](20-γ)} = 10\sqrt{2(γ-10)(20-γ)}$ με $10 < γ < 20$ (διότι αν το $γ \leq 10$ τότε $β \geq 20$ και $β \geq α + γ$ δεν ισχύει δη-

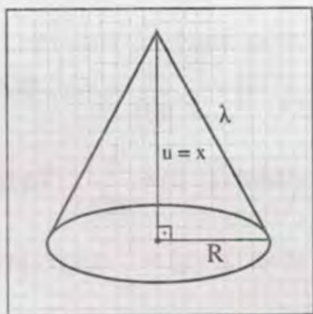
λαδή η τριγωνική ανισότητα και αν $\gamma \geq 20$ τότε $\beta \leq 10$ οπότε και πάλι δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα αφού θα είναι $\gamma \geq \alpha + \beta$).

Είναι $\varepsilon'(\gamma) = 10\dfrac{[2(\gamma-10)(20-\gamma)]'}{2\sqrt{2(\gamma-10)(20-\gamma)}} = 10\dfrac{20-\gamma-(\gamma-10)}{\sqrt{2(\gamma-10)(20-\gamma)}} = 10\dfrac{30-2\gamma}{\sqrt{2(\gamma-10)(20-\gamma)}}$

και $\varepsilon'(\gamma) = 0$ για $\gamma = 15$ με $\varepsilon'(\gamma) > 0$ για $10 < \gamma < 15$ και $\varepsilon'(\gamma) < 0$ για $15 < \gamma < 20$. Άρα το $\varepsilon(\gamma)$ παρουσιάζει μέγιστο για $\gamma = 15$ οπότε και $\beta = 30 - \gamma = 15$. Συνεπώς οι άλλες πλευρές είναι ίσες με 15 m και το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ	10		15		20
$\varepsilon'(\gamma)$		+	0	−	
$\varepsilon(\gamma)$		↗		↘	

β) Ο όγκος κώνου δίνεται από τον τύπο $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon$. Επίσης αφού το ύψος είναι κάθετο στην ακτίνα θα έχουμε $\upsilon^2 + R^2 = \lambda^2$. Θέτοντας $\upsilon = x$ έχουμε $R^2 = \lambda^2 - x^2$ και $V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(\lambda^2 - x^2\right)x$ με $V'(x) = \frac{1}{3}\pi(\lambda^2 - 3x^2)$.



Για $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda$ μηδενίζεται η $V'(x)$ και από τον πίνακα μεταβολής συμπεραίνουμε ότι ο όγκος γίνεται μέγιστος για $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda$.

x	0		$1/\sqrt{3}\,\lambda$		λ
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	V_{max}	↘	

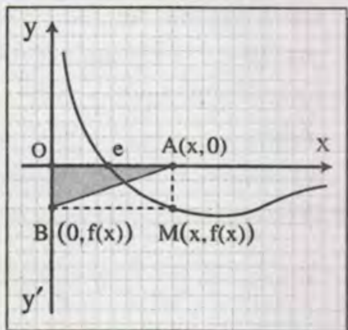
ΘΕΜΑ 191

α) Εάν για το σημείο $M\left(x, \frac{1-\ln x}{x}\right)$ η τετμημένη x μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε με τι ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΒ όπου Α(x, 0), Ο η αρχή των αξόνων και $B\left(0, \frac{1-\ln x}{x}\right)$ όταν το x είναι 4 μονάδες.

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού του τριγώνου αυτού συναρτήσει του χρόνου $t(t \geq 0)$ όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το Μ βρίσκεται στη θέση (1, 1). Ποια είναι η θέση του Μ όταν η γραφική παράσταση του εμβαδού συναρτήσει του χρόνου παρουσιάζει γωνιακό σημείο;

ΛΥΣΗ

> ● Για την εποπτεία του προβλήματος δίνουμε και το γράφημα της R.



α) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΒ είναι

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|x|\,|f(x)| = \frac{1}{2}x\frac{|1-\ln x|}{x} = \frac{|1-\ln x|}{2}$$

Ζητείται ο ρυθμός μεταβολής του όταν $x = 4$ μονάδες. Μας ενδιαφέρει λοιπόν περιοχή του 4 άρα $1 - \ln x < 0$ τότε

$\varepsilon = \dfrac{\ln x - 1}{2}$ και εφόσον το x είναι συνάρτηση του χρόνου t $\varepsilon(t) = \dfrac{\ln x(t) - 1}{2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη για $x(t) > 0$ με

$\varepsilon'(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x(t)}x'(t)$. Αλλά $x'(t) = 2$μον/sec

οπότε $\varepsilon'(t) = \dfrac{1}{x(t)}$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x = 4$ μον. θα

είναι $\varepsilon'(t_0) = \dfrac{1}{4}$ τετραγ.μον./sec.

β) Είναι $\varepsilon(t) = \dfrac{|1 - \ln x(t)|}{2}$ και $x(t) = 2t + c$ $(x'(t) = 2)$. Εφόσον το Μ βρίσκεται στη θέση (1, 1) για $t = 0$ θα είναι $x(0) = 1$ άρα $2\cdot 0 + c = 1$ δηλαδή

$c = 1$. Έχουμε λοιπόν $x(t) = 2t + 1$ και $\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - \ln(2t+1)}{2} & \text{αν } t \le \dfrac{e-1}{2} \\ \dfrac{\ln(2t+1) - 1}{2} & \text{αν } t > \dfrac{e-1}{2} \end{cases}$

Για $0 \le t < \dfrac{e-1}{2}$ είναι $\varepsilon'(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2t+1}2 = -\dfrac{1}{2t+1}$ και για $t > \dfrac{e-1}{2}$ είναι

$\varepsilon'(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2t+1}2 = \dfrac{1}{2t+1}$. Για $t = \dfrac{e-1}{2}$ έχουμε $\displaystyle\lim_{t \to \left(\frac{e-1}{2}\right)^-} \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon\left(\frac{e-1}{2}\right)}{t - \frac{e-1}{2}} =$

$$= \lim_{t \to \left(\frac{e-1}{2}\right)^-} \frac{\frac{1-\ln(2t+1)}{2} - 0}{\frac{2t-e+1}{2}} = \lim_{t \to \left(\frac{e-1}{2}\right)^-} \frac{1 - \ln(2t+1)}{2t - e + 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$ και εφαρμόζοντας τον

κανόνα Hospital είναι ίσο με $\displaystyle\lim_{t \to \left(\frac{e-1}{2}\right)^-} \frac{-\frac{1}{2t+1}2}{2} = -\frac{1}{e}$ αφού $2t + 1 \to e$.

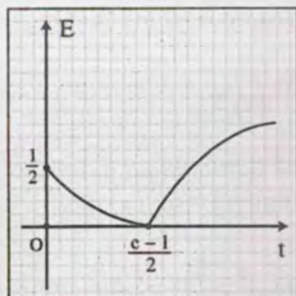
Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε $\lim\limits_{t\to\left(\frac{e-1}{2}\right)^+} \dfrac{\varepsilon(t)-\varepsilon\left(\frac{e-1}{2}\right)}{t-\frac{e-1}{2}}=\dfrac{1}{e}$.

Άρα η $\varepsilon(t)$ δεν είναι παραγωγίσιμη για $t=\dfrac{e-1}{2}$. Έχουμε λοιπόν

$$\varepsilon'(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2t+1} & \text{αν } 0\le t<\dfrac{e-1}{2}\\ \dfrac{1}{2t+1} & \text{αν } t>\dfrac{e-1}{2}\end{cases} \quad \text{και} \quad \varepsilon''(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2t+1)^2} & \text{αν } 0\le t<\dfrac{e-1}{2}\\ -\dfrac{2}{(2t+1)^2} & \text{αν } t>\dfrac{e-1}{2}\end{cases}$$

Ο δε πίνακας μεταβολής και η γραφική παράσταση της $\varepsilon(t)$ είναι:

t	0		$\frac{e-1}{2}$		$+\infty$
$\varepsilon'(t)$		−	‖	+	
$\varepsilon''(t)$		+	‖	−	
$\varepsilon(t)$	1/2	↘	$\varepsilon_{min}=0$	↗	$+\infty$



Για $t=\dfrac{e-1}{2}$ θα είναι $x=2\,\dfrac{e-1}{2}+1$ (αφού $x=2t+1$) δηλαδή $x=e$

οπότε $f(e)=\dfrac{1-\ln e}{e}=0$. Άρα το M βρίσκεται στη θέση (e, 0).

ΘΕΜΑ 192

Μια συνάρτηση $f:[0,6]\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,6]$ και ισχύει $f(0)=1$ και $f'(x)\ge x$ για $0\le x\le 6$.

Να δείξετε ότι θα είναι $f(6)\ge 19$.

ΛΥΣΗ

α^{ος} τρόπος

Η συνθήκη $f'(x)\ge x \ \forall x\in[0,6]$ γράφεται $\left[f(x)-\dfrac{x^2}{2}\right]'\ge 0 \ \forall x\in[0,6]$

και εκφράζει ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$ είναι αύξουσα στο διάστημα [0, 6]. Θα έχουμε λοιπόν $g(6)\ge g(0)$. Όμως είναι $g(0)=f(0)-0=1$ και

$g(6) = f(6) - \frac{36}{2} = f(6) - 18$. Βρίσκουμε τελικά ότι θα είναι

$$f(6) - 18 \geq 1 \text{ οπότε } f(6) \geq 19$$

β^{ος} τρόπος

Έχουμε $f'(x) \geq x \ \forall x \in [0, 6]$. Άρα, αφού f' συνεχής στο $[0, 6]$, θα είναι και

$$\int_0^t f'(x)\,dx \geq \int_0^t x\,dx \quad \forall t \in [0, 6]$$

Προκύπτει $f(t) - f(0) \geq \frac{t^2}{2}$ για $0 \leq t \leq 6$

οπότε $f(t) \geq 1 + \frac{t^2}{2}$ για $0 \leq t \leq 6$

Συμπεραίνουμε τελικά ότι θα είναι $f(6) \geq 1 + 18 = 19$.

ΘΕΜΑ 193

α) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\log_\alpha|x|$ με $x \neq 0$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες στο $(x_0, f(x_0))$ με $|x_0| = e$ διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β) Εάν $\log_\alpha x^2 + 2x - 2 \geq 0$ (1) $\forall x > 0$ να δείξετε ότι το εμβαδό που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της $g(x) = 2\log_\alpha x$, της $-g(x)$ και των εφαπτομένων τους στο $x_0 = e$ είναι $2(e-2)$ τετραγ. μονάδες.

ΛΥΣΗ

α) Η f(x) γράφεται $f(x) = \log_\alpha x^2$ και είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 0$ με

$f'(x) = \frac{1}{x^2\ln\alpha} 2x = \frac{2}{x\ln\alpha}$.

Για $x_0 = e$ η εφαπτόμενη είναι ε_1: $y - f(e) = f'(e)(x - e)$

ή $y - \frac{2}{\ln\alpha} = \frac{2}{e\ln\alpha}(x - e)$ ισοδύναμα $y = \frac{2}{e\ln\alpha}x$.

Για $x_0 = -e$ η εφαπτόμενη είναι ε_2: $y - f(-e) = f'(-e)(x + e)$

ή $y - \frac{2}{\ln\alpha} = -\frac{2}{e\ln\alpha}(x + e)$ ισοδύναμα $y = -\frac{2}{e\ln\alpha}x$.

Άρα και στις δύο περιπτώσεις διέρχεται από το (0, 0).

β) Εφόσον $x > 0$ η (1) γίνεται $2\log_\alpha x + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \log_\alpha x + x - 1 \geq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = \log_\alpha x + x - 1$ για την οποία γνωρίζουμε $\Phi(x) \geq 0 \ \forall x>0$. $\Phi(1) = 0$ άρα $\Phi(x) \geq \Phi(1)$ δηλαδή η Φ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 οπότε

εφόσον είναι παραγωγίσιμη συμπεραίνουμε από το Θ. Fermat ότι $\Phi'(1) = 0$ και επειδή $\Phi'(x) = \frac{1}{x\ln\alpha} + 1$, θα είναι $\frac{1}{\ln\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 1/e$.

Η g(x) γίνεται $g(x) = 2\frac{\ln x}{\ln\alpha} = 2\frac{\ln x}{\ln\frac{1}{e}} = -2\ln x$ η δε $-g(x)$ γίνεται

$-g(x) = 2\ln x$ με $g'(x) = -\frac{2}{x}$ και $(-g(x))' = \frac{2}{x}$.

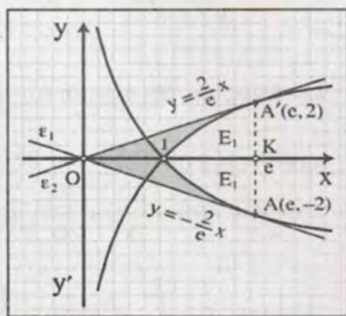
Οι εφαπτόμενες στο $x_0 = e$ στην C_g και C_{-g} αντίστοιχα θα είναι

ε_1: $y + 2\ln e = -\frac{2}{e}(x - e)$ ισοδύναμα $y = -\frac{2}{e}x$

και

ε_2: $y - 2\ln e = \frac{2}{e}(x - e)$ ισοδύναμα $y = \frac{2}{e}x$

Το εμβαδό που σχηματίζεται από τις C_g, C_{-g}, ε_1 και ε_2 είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου ΟΑ΄Α μείον $2E_1$ δηλαδή



$$\varepsilon = \frac{1}{2}(AA')(OK) - 2E_1 =$$

$$= \frac{1}{2}4\cdot e - 2\int_1^e 2\ln x\,dx =$$

$$= 2e - 4\int_1^e (x)'\ln x\,dx =$$

$$= 2e - 4\left([x\ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\,dx\right) = 2e - 4\left(e - \int_1^e dx\right) =$$

$$= 2e - 4e + 4[x]_1^e = 2e - 4e + 4e - 4 = 2(e-2) \text{ τετραγ. μονάδες}$$

ΘΕΜΑ 194

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $x = 1/2$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

β) Εάν η εφαπτόμενη στο $(\beta, f(\beta))$ είναι η ευθεία $4x - 9y + 25 = 0$ (ε) και $\int_\alpha^{1/2} f(x)\,dx + \int_\beta^{1/2} f(x)\,dx = 0$, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Η f(x) ορίζεται στο IR και $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}-x\right)=\sqrt[3]{\left[2\left(\frac{1}{2}-x\right)-1\right]^2}=\sqrt[3]{(-2x)^2}=\sqrt[3]{4x^2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\sqrt[3]{\left[2\left(\frac{1}{2}+x\right)-1\right]^2}=\sqrt[3]{(2x)^2}=\sqrt[3]{4x^2}$$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(1/2-x)=f(1/2+x)$, συνεπώς η ευθεία $x=1/2$ είναι άξονας συμμετρίας.

β) Η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται: $y=\frac{4}{9}x+\frac{25}{9}$ άρα $f'(\beta)=\frac{4}{9}$, αλλά για

$x>\frac{1}{2}$ είναι $f'(x)=\frac{2}{3}(2x-1)^{-1/3}2=\frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}>0$ ενώ για $x<\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{2}{3}(1-2x)^{-1/3}(-2)=\frac{-4}{3\sqrt[3]{1-2x}}<0.$

Συνεπώς για την εύρεση του β θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{4}{3\sqrt[3]{2\beta-1}}=\frac{4}{9}$ η οποία ισοδυναμεί με $2\beta-1=27$ δηλαδή $\beta=14$, η οποία τιμή επαληθεύει και την εξίσωση $f(\beta)=\frac{4}{9}\beta+\frac{25}{9}$, άρα $\boxed{\beta=14}$.

Έχουμε $I=\int_{\alpha}^{1/2}f(x)dx+\int_{14}^{1/2}f(x)dx=0$. Αλλά

Θέτουμε $y=1-x$
εάν
$x=14$ τότε $y=-13$ και
$x=1/2$ τότε $y=1/2$
Επίσης $dy=-dx$

$$\int_{14}^{1/2}f(x)dx=\int_{14}^{1/2}\sqrt[3]{(2x-1)^2}\,dx=$$

$$=-\int_{-13}^{1/2}\sqrt[3]{[2(1-y)-1]^2}\,dy=\int_{1/2}^{-13}\sqrt[3]{(2x-1)^2}\,dx.$$

Οπότε $I=0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{1/2}f(x)dx+\int_{1/2}^{-13}f(x)dx=0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{-13}f(x)dx=0$

και εφόσον $f(x)\geq 0$ και δεν είναι η μηδενική συνάρτηση θα έχουμε $\boxed{\alpha=-13}$.

Τελικά $\boldsymbol{\alpha=-13}$ και $\boldsymbol{\beta=14}$.

ΘΕΜΑ 195

i) **Να αποδείξετε ότι $\forall x > 0$ ισχύει $\ln x \le x - 1$**

ii) **Εάν $\forall x > 0$ $\log_\alpha x \le x - 1$ με $\alpha > 0$ ν.δ.ο $\alpha = e$**

iii) **Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln \dfrac{e^{x^2-1}}{x^{x+1}}$ τον x'x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.**

ΛΥΣΗ

i) Θα μελετήσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = x - 1 - \ln x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$, η οποία μηδενίζεται για $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(1) = 0$	↗	

Έχουμε $f'(x) < 0$ αν $0 < x < 1$ και $f'(x) > 0$ αν $x > 1$.
Κατά συνέπεια η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 0$ δηλαδή $f(x) \ge 0$, $\forall x > 0$ οπότε $\ln x \le x - 1$, $\forall x > 0$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = \log_\alpha x - x + 1 \le 0$ διότι $\log_\alpha x \le x - 1$ $\forall x>0$. $\Phi(1) = \log_\alpha 1 - 1 + 1 = 0$ άρα $\Phi(x) \le \Phi(1)$ $\forall x > 0$. Η Φ λοιπόν παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$, που είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος, και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό αφού είναι παραγωγίσιμη $\forall x > 0$. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Fermat άρα $\Phi'(1) = 0$.

Αλλά $\Phi'(x) = \dfrac{1}{x\ln\alpha} - 1$ οπότε $\Phi'(1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$.

iii) Βρίσκουμε πρώτα τη θέση της C_f σε σχέση με τον $x'x$ και προς τούτο αρκεί να βρούμε το πρόσημο της $f(x)$. Η $f(x)$ ισοδύναμα γράφεται
$f(x) = \ln e^{x^2-1} - \ln x^{x+1} = x^2 - 1 - (x+1)\ln x = (x+1)(x-1) - (x+1)\ln x =$
$= (x+1)(x - 1 - \ln x)$, αλλά από το πρώτο ερώτημα έχουμε $x - 1 - \ln x \ge 0$ και επειδή $x > 0$ θα είναι $x + 1 > 0$, συνεπώς $f(x) \ge 0$. Άρα το εμβαδό θα είναι

$$\varepsilon = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e [(x^2 - 1) - (x+1)\ln x]\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^e - \int_1^e (x+1)\ln x dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^e - \left[\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x\right]_1^e + \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^e+\int_1^e\left(\frac{x}{2}+1\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^e+\left[\frac{x^2}{4}+x\right]_1^e=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\not{x}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x+\frac{x^2}{4}+\not{x}\right]_1^e=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x+\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{e^2}{2}+e\right)+\frac{e^2}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{e^2}{2}-e+\frac{e^2}{4}-\frac{7}{12}=\frac{4e^3-6e^2-12e+3e^2-7}{12}=\frac{4e^3-3e^2-12e-7}{12}.$$

ΘΕΜΑ 196

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f: A → IR, με τύπο

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}\quad \forall x\in A,\ \text{όπου } A=\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

Να δείξετε ότι με κατάλληλες τιμές των α, β ∈ IR, θα έχουμε

$$f(x)=2+\frac{\alpha}{x-1}-\frac{\beta}{x+1}\quad \forall x\in A$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx$$

ΛΥΣΗ

α) Θα έχουμε $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}=2+\frac{\alpha}{x-1}-\frac{\beta}{x+1}\ \forall x\in A$ τότε και μόνο όταν είναι

$$2x^2=2(x-1)(x+1)+\alpha(x+1)-\beta(x-1)\quad \forall x\in A$$

είναι δηλαδή $2x^2=2x^2-2+(\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)\ \forall x\in A$

και τελικά όταν $(\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta-2)=0\ \forall x\in A$

Η τελευταία συνθήκη γίνεται κατά τα γνωστά

$\alpha-\beta=0$ και $\alpha+\beta=2$, οπότε $\alpha=\beta=1$

Είναι λοιπόν

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \quad \forall\, x \in A$$

β) Με τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης έχουμε

$$I = \int_2^3 \ln(x^2-1)(x)'dx = \left[x\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^3 - \int_0^3 x\,\frac{2x}{x^2-1}\,dx \quad \text{δηλαδή}$$

$$I = 3\ln 8 - 2\ln 3 - \int_2^3 f(x)\,dx\,.$$

Είναι όμως $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \left[2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]dx = [2x+\ln(x-1)-\ln(x+1)]_2^3$

$$= \left[2x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^3 \text{ άρα } \int_2^3 f(x)dx = 2 + \ln\left(\frac{2}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

οπότε, βρίσκουμε τελικά, ότι είναι

$$I = 3\ln 8 - 2\ln 3 - 2 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -2 + \ln\left(\frac{2^9 \cdot 2}{3^2 \cdot 3}\right) \quad \text{δηλαδή}$$

$$I = -2 + \ln\left(\frac{2^{10}}{3^3}\right) = -2 + 10\ln 2 - 3\ln 3.$$

ΘΕΜΑ 197

α) Αν η γραφική παράσταση παραγωγίσιμης συνάρτησης είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και δέχεται ασύμπτωτο στο $+\infty$ την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ να δείξετε ότι $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f(x) < \lambda x + \beta$.

β) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_x^{x+1} x\ln t\,dt < x\ln x + 3 + x,\ \ x > 0$ (1).

ΛΥΣΗ

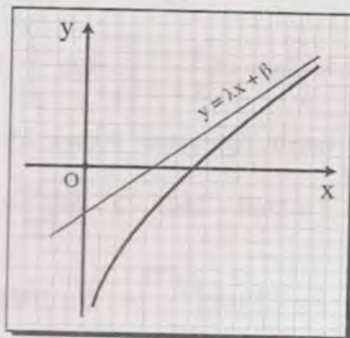
α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) - \lambda x - \beta$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $\Phi'(x) = f'(x) - \lambda$. Εφόσον η f κοίλη, η $f'(x)$ θα είναιαυστηρά φθίνουσα, αλλά τότε και η $f'(x) - \lambda$ θα είναι αυστηρά φθίνουσα. Δηλαδή $\Phi'(x)$ αυστηρά φθίνουσα.

Όμως η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτο την $y=\lambda x+\beta$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$. Αν $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$ τότε $f(x)=xg(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lambda$, συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ οπότε με τον κανόνα του L' Hospitale έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{\pm\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lambda$ και κατά συνέπεια $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)-\lambda)=0$

και επειδή Φ' αυστηρά φθίνουσα θα είναι $\Phi'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\Phi'(x)$	+ ↘	0
$\Phi(x)$	− ↗	0

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\Phi(x)$ αυστηρά αύξουσα και εφόσον η f έχει ασύμπτωτο την $y=\lambda x+\beta$ θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x-\beta]=0$. Άρα $\Phi(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $f(x)<\lambda x+\beta\ \forall x\in\mathbb{R}$.



β) Η (1) ισοδυναμεί με την $\int_x^{x+1}\ln t\,dt<\ln x+\frac{3}{x}+1$ (2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x)=\int_x^{x+1}\ln t\,dt-\ln x-\frac{3}{x}-1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $\Phi'(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}$ και η Φ' επίσης είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $\Phi''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^3}=$

$$=\frac{x^3-x^2(x+1)+x(x+1)-6(x+1)}{x^3(x+1)}=\frac{-5x-6}{x^3(x+1)}<0\ \forall x>0.$$

Άρα η Φ είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$. Έχουμε

$$(x+1-x)\ln x < \int_x^{x+1} \ln t\, dt < (x+1-x)\ln(x+1)$$ διότι lnt αυστηρά αύξουσα

δηλ. $\ln x < \int_x^{x+1} \ln t\, dt < \ln(x+1)$ και

$\ln x - \ln x - \frac{3}{x} - 1 < \Phi(x) < \ln(x+1) - \ln x - \frac{3}{x} - 1$ ισοδύναμα

$-\frac{3}{x} - 1 < \Phi(x) < \ln\frac{x+1}{x} - \frac{3}{x} - 1$

Αλλά $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}-1\right) = -1$ και $\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$

Άρα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = -1$. Συνεπώς η Φ έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ την $y=-1$ και με βάση το α) ερώτημα $\Phi(x) < -1$ οπότε $\Phi(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η (2) είναι αληθής οπότε και η (1).

ΘΕΜΑ 198

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f(\alpha) = \int_0^1 |x^2+\alpha|\, dx$.

α) Να βρείτε το εξαγόμενο $f(\alpha)$ για $\alpha \le -1$, για $-1 \le \alpha \le 0$ και για $\alpha > 0$

β) Να δείξετε ότι $f(\alpha) \ge f\left(-\frac{1}{4}\right)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) **Έστω $\alpha \le -1$.** Τότε για $0 \le x \le 1$ έχουμε $x^2+\alpha \le 0$ οπότε

$$|x^2+\alpha| = -x^2-\alpha \quad (\text{για } 0 \le x \le 1)$$

και είναι $f(\alpha) = -\int_0^1 (x^2+\alpha)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3}+\alpha x\right)_0^1 = -\alpha - \frac{1}{3} \ge 1 \ \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, αφού $-\alpha \ge 1$

- **Έστω ότι είναι $\alpha \ge 0$.** Τότε $x^2+\alpha \ge 0$ για $0 \le x \le 1$ και έχουμε

$$f(\alpha) = \int_0^1 (x^2+\alpha)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+\alpha x\right)_0^1 = \alpha + \frac{1}{3} \ge \frac{1}{3} \quad (\text{αφού } \alpha \ge 0)$$

- Έστω τώρα ότι είναι **$-1 < \alpha < 0$.** Μπορούμε τότε να θέσουμε

$$\alpha = -\beta^2 \text{ όπου } 0 < \beta < 1$$

Βρίσκουμε $f(\alpha)=\int_0^1 |x^2-\beta^2|dx$ και είναι $x^2-\beta^2 \le 0$ για $0\le x\le \beta$, ενώ

$x^2-\beta^2\ge 0$ για $\beta\le x\le 1$.

Συμπεραίνουμε ότι θα είναι

$$f(\alpha)=\int_0^\beta (\beta^2-x^2)dx+\int_\beta^1 (x^2-\beta^2)dx=\left(\beta^2x-\frac{x^3}{3}\right)_0^\beta+\left(\frac{x^3}{3}-\beta^2x\right)_\beta^1 \text{ οπότε}$$

$$f(\alpha)=\frac{2\beta^3}{3}+\frac{1}{3}-\beta^2+\frac{2\beta^3}{3} \text{ δηλαδή } f(\alpha)=\frac{1+4\beta^3}{3}-\beta^2=\frac{1}{3}\left(1-4\alpha\sqrt{|\alpha|}\right)+\alpha.$$

β) Είναι $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 199

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+1}\,e^{-x}$ με $x\ge -1$.

Α. α) Να βρεθεί το σύνολο στο οποίο παραγωγίζεται, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθούν οι ασύμπτωτες, αν υπάρχουν.

β) Να δείξετε ότι $\forall\, x\ge 0$ ισχύει: $f(x+1)\le \int_x^{x+1} f(t)dt \le f(x)$ και να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

Β. Αν $\Phi(x)=\int_{-1}^x \sqrt{t+1}\,e^{-t}dt,\ \forall\, x\ge -1$

α) Να δείξετε ότι $\sqrt{t+1}\le \frac{t+3}{2\sqrt{2}}$ και κατόπιν ότι $\Phi(x)\le \frac{3e}{2\sqrt{2}},\ \forall\, x\ge -1$

β) Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της Φ στο $x_0=-1$.

ΛΥΣΗ

Α. α) Για $x > -1$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{-x} - \sqrt{x+1}\, e^{-x} =$

$= \frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}} e^{-x}$. Στο $x_0 = -1$ έχουμε: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+1}\, e^{-x}}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+1}} = +\infty$ όχι παραγωγίσιμη

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη για x>1 με $f'(x) = \frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}} e^{-x}$

δέχεται όμως εφαπτομένη σ' αυτό την $x = -1$.

Η $f'(x)$ μηδενίζεται για $x = -1/2$ και είναι ομόσημη του $-2x - 1$ δηλαδή

$f'(x) > 0$ αν $-1 < x < -\frac{1}{2}$ και $f'(x) < 0$ αν $x > -\frac{1}{2}$.

Άρα η f αυστηρά αύξουσα στο $[-1, -1/2]$ και αυστηρά φθίνουσα στο $[-1/2, +\infty)$, παρουσιάζει δε μέγιστο για $x = -1/2$ το $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}$.

x	-1		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	0

Εφόσον $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+1}\, e^x} = 0$,

η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτο την $y = 0$, δηλ. τον $x'x$.

β) Η f είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$ άρα και στο $[x, x+1]$ με $x \geq 0$ και η f είναι αυστηρά φθίνουσα στο $[-1/2, +\infty)$ άρα και στο $[x, x+1]$ με $x \geq 0$ άρα η ελάχιστη τιμή σ' αυτό είναι η $f(x+1)$ και η μέγιστη η $f(x)$, οπότε έχουμε:

Γνωρίζουμε ότι: αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και μ, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα τότε

$$\mu(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$$

$f(x+1)(x+1-x) \leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x)(x+1-x)$ και ισοδύναμα

$$f(x+1) \leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x) \quad (1)$$

Αλλά $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1)=\lim_{x\to+\infty} f(y)=0 \quad \left|\begin{array}{l} y=x+1 \\ \text{αν } x\to+\infty \\ \text{τότε } y\to+\infty \end{array}\right.$$

Συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt=0.$$

Παρατήρηση: Εφόσον $f(x)\geq 0\ \forall\, x\geq -1$ θα είναι και

$$\int_x^{x+1} f(t)dt\geq 0$$

διότι x+1>x και σε συνδυασμό με την (1)

$$0\leq\int_x^{x+1} f(t)dt\leq f(x)$$

και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ άρα και το ζητούμενο όριο είναι μηδέν.

Β. α) $\sqrt{t+1}\leq\dfrac{t+3}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow t+1\leq\dfrac{t^2+6t+9}{8}\Leftrightarrow t^2-2t+1\geq 0\Leftrightarrow (t-1)^2\geq 0$

που είναι προφανές. Έχουμε λοιπόν

$$\Phi(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{t+1}\,e^{-t}dt\leq\int_{-1}^{x}\frac{t+3}{2\sqrt{2}}\,e^{-t}dt=$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση, υπολογίζουμε το β' μέλος της ανισότητας.

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{x}(t+3)\,e^{-t}dt.\ \text{Αλλά}\ \int_{-1}^{x}(t+3)e^{-t}dt=$$

$$=\int_{-1}^{x}(t+3)\,(-e^{-t})'\,dt=\left[-(t+3)e^{-t}\right]_{-1}^{x}+\int_{-1}^{x}e^{-t}dt=$$

$$=\left[-(t+4)e^{-t}\right]_{-1}^{x}=3e-(x+4)e^{-x}=g(x)\ \text{δηλαδή}\ \Phi(x)\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}\,g(x)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x)\leq 3e$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο IR άρα και στο $[-1,+\infty)$, με

$g'(x)=(x+3)e^{-x}>0\ \forall\, x\geq -1$. Συνεπώς η g αυστηρά αύξουσα στο $[-1,+\infty)$ άρα $g(x)<\lim_{x\to+\infty} g(x)$ και

x	−1	+∞
g΄(x)	+	
g(x)	↗	3e

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=3e-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{e^x}=3e-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=3e$$

Συνεπώς $\Phi(x)\leq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,g(x)<\dfrac{3e}{2\sqrt{2}}$ δηλαδή $\Phi(x)<\dfrac{3e}{2\sqrt{2}}$ οπότε

προφανώς και $\Phi(x) \leq \frac{3e}{2\sqrt{2}}$ $\forall x \geq -1$.

β) Η $\Phi(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{t+1}\, e^{-t} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, +\infty)$ με

$\Phi'(x) = \sqrt{x+1}\, e^{-x}$, οπότε $\Phi'(-1) = 0$. Επίσης $\Phi(-1) = \int_{-1}^{-1} \sqrt{t+1}\, e^{-t} dt = 0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = -1$ στη γραφική παράσταση της Φ είναι $y - \Phi(-1) = \Phi'(-1)(x+1)$ και $\Phi(-1) = \Phi'(-1) = 0$ οπότε η εφαπτομένη είναι $y = 0$ δηλαδή ο $x'x$.

ΘΕΜΑ 200

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^x f(t)dt - e^x \leq e^{\alpha x} - x^2 - 2 \quad (1).$$

Να δείξετε ότι $f(0) = \alpha + 1$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt - e^x - e^{\alpha x} + x^2 + 2$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $\Phi(x) \leq 0$ (από την (1)).

Εξετάζουμε αν η Φ παίρνει την τιμή μηδέν.

Είναι $\Phi(0) = \int_0^0 f(t)dt - e^0 - e^{\alpha 0} + 0^2 + 2 = 0$, άρα $\Phi(x) \leq \Phi(0) = 0$.

Η Φ λοιπόν παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο και η Φ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό αφού η f είναι συνεχής. Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat για την Φ στο $x = 0$ άρα $\Phi'(0) = 0$.

Αλλά $\Phi'(x) = f(x) - e^x - \alpha e^{\alpha x} + 2x$ οπότε η $\Phi'(0) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(0) - 1 - \alpha = 0$ οπότε $f(0) = \alpha + 1$.

ΘΕΜΑ 201

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(-1, +\infty)$ με $f(0) = -1$, $f(1) = \ln 2$ και $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει, $\forall x \in \mathbb{R}$ με $x > -1$, η σχέση

$$\int_0^x f(t)dt \cdot \int_x^1 f(t)dt \geq \alpha(x-1)\ln(x+1) \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt \cdot \int_x^1 f(t)dt - \alpha(x-1)\ln(x+1)$ για την οποία γνωρίζουμε από την (1) ότι $\Phi(x) \geq 0$ $\forall x > -1$ με $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ άρα $\Phi(x) \geq \Phi(1) = 0$ και $\Phi(x) \geq \Phi(0) = 0$. Η Φ λοιπόν παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και για $x = 1$ τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του $(-1, +\infty)$ και η Φ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά αφού η f είναι συνεχής. Άρα $\Phi'(0) = 0$ και $\Phi'(1) = 0$.

Όμως $\Phi'(x) = f(x)\int_x^1 f(t)dt - f(x)\int_0^x f(t)dt - \alpha\ln(x+1) - \alpha(x-1)\frac{1}{x+1}$.

Οπότε η $\Phi'(0) = 0$ ισοδυναμεί με την $f(0)\int_0^1 f(t)dt + \alpha = 0$ αλλά

$f(0) = -1$ και $\int_0^1 f(x)dx = 1$ οπότε $\boldsymbol{\alpha = 1}$.

Επίσης η $\Phi'(1) = 0$ γίνεται $-f(1)\int_0^1 f(t)dt - \alpha\ln 2 = 0 \Leftrightarrow -\ln 2 = \alpha\ln 2$ και κατά συνέπεια $\boldsymbol{\alpha = -1}$.

Έχουμε λοιπόν $\alpha = 1$ και $\alpha = -1$. Πράγμα αδύνατο.

Άρα δεν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (1).

ΘΕΜΑ 202

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση fog με f(x) = lnx ορίζεται στο IR και είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρεθεί η $(fog)^{-1}$.

γ) Να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha}(fog)(x)dx = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Το σύνολο ορισμού της g είναι το IR και της f το $\mathbb{R}_+^*$ άρα της fog είναι: $A = \{x/x \in \mathbb{R}: g(x) \in \mathbb{R}_+^*\}$. Η fog λοιπόν ορίζεται όπου η $g(x) > 0$. Εάν $x \geq 0$ τότε $x+\sqrt{x^2+1} > 0$ δηλ. $g(x)>0$. Αν $x<0$, θέλουμε $g(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$ $(-x > 0) \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1>0$ προφανές, άρα και για $x < 0$ η $g(x) > 0$. Συνεπώς $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, οπότε το σύνολο ορισμού της fog είναι το IR. Η $(fog)(x) = f(g(x)) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR με

$$(fog)'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

άρα η fog αυστηρά αύξουσα οπότε και ένα προς ένα συνεπώς αντιστρέψιμη.

β) Έχουμε $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2y} - 2e^y x + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}$. Άρα $(fog)^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$ η οποία έχει σύνολο ορισμού το σύνολο τιμών της fog.

γ) Θα δείξουμε ότι εάν μία συνάρτηση Φ(x) είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$ και περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}\Phi(x)dx = 0$. Έχουμε $\int_{-\alpha}^{\alpha}\Phi(x)dx =$

$$= \int_{-\alpha}^{0}\Phi(x)dx + \int_{0}^{\alpha}\Phi(x)dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{0}-\Phi(-u)du + \int_{0}^{\alpha}\Phi(x)dx =$$

Φ περιττή άρα $\Phi(-x) = -\Phi(x)$
Θέτουμε στο πρώτο ολοκλήρωμα $-u$ όπου x δηλ. $x = -u$ οπότε $dx = -du$ και όταν $x = -\alpha$, $u = \alpha$ όταν $x = 0$, $u = 0$.

$$= \int_{\alpha}^{0} \Phi(u)du + \int_{0}^{\alpha} \Phi(x)dx = -\int_{0}^{\alpha} \Phi(u)du + \int_{0}^{\alpha} \Phi(x)dx = 0.$$

Θα δείξουμε ότι η fog είναι περιττή. Αρκεί να δείξουμε

$$(fog)(-x) = -(fog)(x) \Leftrightarrow \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) = -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2\right] = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2+1-x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 = 0 \text{ προφανές}$$

άρα η fog είναι περιττή οπότε και $\int_{-\alpha}^{\alpha} (fog)(x)dx = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 203

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και να εξετάσετε το πρόσημο της f(x).

β) Εάν $\Phi(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt$ για $x \geq 0$, να βρείτε τον τύπο της Φ στο $[0, +\infty)$ και το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον x'x.

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln x}{x} = \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0. \text{ Άρα } f'(x) = \begin{cases} x(2\ln x+1), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\text{με } \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}[x(2\ln x+1)] = \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x+1}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{2/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{-x} = 0$$

Άρα η f΄ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε και το $[0, +\infty)$.

Για $x > 0$ έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

και $f'(x) > 0$ αν $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ενώ $f'(x) > 0$ αν $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$

x	0		$1/\sqrt{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	−	0	+	|		
$f(x)$	0	↘ −	$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$	− ↗	0	+	

Η f λοιπόν αυστηρά φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και αυστηρά αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right]$ και $f(1) = 0$ άρα στο $(0, 1)$ έχουμε $f(x) < 0$ ενώ στο $(1, +\infty)$ έχουμε $f(x) > 0$.

β) Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, η Φ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό άρα και συνεχής. Βρίσκουμε τον τύπο της Φ στο $(0, +\infty)$ και έχουμε

$$\Phi(x) = \int_1^x t^2 \ln t dt = \int_1^x \left(\frac{t^3}{3}\right)' \ln t dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^3}{3}\,\frac{1}{t}\,dt =$$

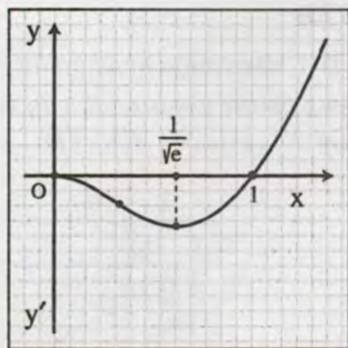
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int_1^x \frac{t^2}{3}dt = \frac{x^3}{3}\ln x - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}(x^3\ln x) - 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^3} =$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-3/x^4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{9} \text{ άρα } \Phi(0) = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Άρα } \Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(3x^3\ln x - x^3 + 1), & x > 0 \\ \frac{1}{9} & , x = 0 \end{cases}$$

Η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 0)$ και $f(x) \le 0 \ \forall x \in [0, 1]$.



Άρα $\varepsilon = -\int_0^1 f(x)dx =$

$= \int_1^0 f(x)dtx$, αλλά $\Phi(0) = \int_1^0 f(t)dt$

οπότε $\varepsilon = \Phi(0) = \frac{1}{9}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 204

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του ολοκληρώματος

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} (4x - x^2)dx \quad \text{όπου είναι } \alpha < \beta$$

ΛΥΣΗ

Για την ολοκληρωτέα συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = 4x - x^2$$

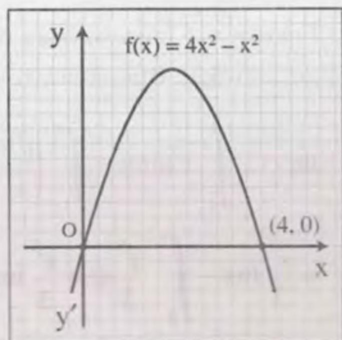
ισχύει

$f(x) > 0$ για $0 < x < 4$

$f(x) < 0$ για $x < 0$ και για $x > 4$ με $f(0)=f(4)=0$.

Άρα η μέγιστη τιμή του $I(\alpha, \beta)$ είναι

$$I(0,4) = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$



ΘΕΜΑ 205

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$.

Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθούν τα ενδεχόμενα σημεία καμπής της f.

ΛΥΣΗ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR και έχουμε $f'(x) = (x-1)(x-2)^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο της $f'(x)$ και της $f''(x)$ για $x \in \mathbb{R}$, όπου $f''(x) = (x-2)^2 + 2(x-1)(x-2) = (x-2)(3x-4)$.

x	−∞		1		4/3		2		+∞
f′′(x)			+		0	−	0		+
f′(x)		−	0		+		0		+
f(x)		↘		↗	σ.κ.		σ.κ.		↗

Η f έχει ελάχιστο για x = 1 ίσο με

$$f(1)=\int_0^1 (t-1)(t-2)^2dt=\left[\frac{t^4}{5}-5\frac{t^3}{3}+8\frac{t^2}{2}-4t\right]_0^1 \text{ δηλαδή } f(1)=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+4-4=-\frac{17}{12}$$

Έχει επίσης δύο σημεία καμπής για $x=\frac{4}{3}$ και $x=2$, με τεταγμένες αντίστοιχα

$$y_1=\int_0^{4/3}(t-1)(t-2)^2dt=\frac{64}{81}-\frac{320}{81}+\frac{64}{9}-\frac{16}{3}=\frac{256}{81}+\frac{16}{9}=\frac{400}{81}$$

και $$y_2=\int_0^2 (t-1)(t-2)^2dt=4-\frac{40}{3}+16-8=-\frac{4}{3}.$$

ΘΕΜΑ 206

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$ $\forall x>0$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ενδεχόμενα ακρότατα της f. Είναι παραγωγίσιμη για $x=1$;

β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα σημεία καμπής της f και τις ασύμπτωτες του διαγράμματος της f. Να κατασκευάσετε πίνακα μεταβολής της f και αντίστοιχο διάγραμμα για $0<x<+\infty$.

γ) Να δείξετε ότι είναι $\int_1^{e^2} f(x)dx \le 2\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\ln x>0$ για $x>1$ και $\ln x<0$ για $0<x<1$, άρα λοιπόν

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{αν } 0<x<1 \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{αν } x>1 \end{cases}$$

. Η f είναι συνεχής για $x>0$, αφού είναι $f(x)=\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|$ και η συνάρτηση με τύπο $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ είναι συνεχής για $x>0$. Όσον αφορά την παρα-

Αν σ' ένα διάστημα Δ είναι συνεχής μια συνάρτηση g, τότε και η συνάρτηση |g| είναι συνεχής στο ίδιο διάστημα. Όμως, αν η g είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 με $g(x_0)=0$, ενδέχεται η συνάρτηση |g| να είναι ή όχι παραγωγίσιμη στο x_0. Αν όμως $g(x_0)\neq 0$ τότε και η |g| είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γωγισιμότητα, η f είναι στα ανοικτά διαστήματα $0 < x < 1$ και $1 < x < +\infty$ επίσης παραγωγίσιμη με,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}} & \text{αν } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$. Για $x = 1$, έχουμε $f(x) = 0$ και είναι

$$f_{\alpha}'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1}\left(-\frac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x}}\right) = -1, \text{ αφού } \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ (Hospital)}$$

Επίσης $f_{\delta}'(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x}} = 1$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη για $x = 1$.

Μονοτονία - ακρότατα. Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα. Σημειώνουμε ότι είναι $f'(x) = 0$ για $\ln x = 2$ δηλ. για $x = e^2$ και $f'(x) > 0$ τότε και μόνο, όταν $1 < x < e^2$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	+	0	−	
f(x)		↘	0 $f_{min} = 0$	↗	$2/e$ f_{max}	↘	0

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}} = +\infty$

Η f έχει ελάχιστο για $x = 1$ με $f_{min} = 0$ και μέγιστο για $x = e^2$ ίσο με $f_{max} = 2/e$. Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$ των αυστηρά θετικών αριθμών.

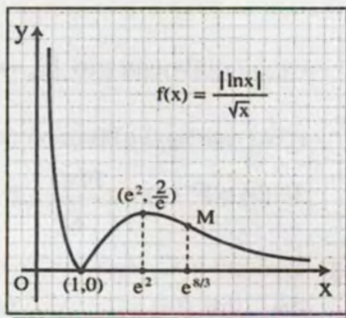
β) Σημεία καμπής - κοίλα κυρτά

Εχουμε τώρα $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8 - 3\ln x}{4x^2\sqrt{x}} & \text{αν } 0 < x < 1 \\ \dfrac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

Το πρόσημο της $f''(x)$ και η κυρτότητα της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		$e^{8/3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	‖	−	0	+	
f(x)	$+\infty$	∪	0 σημείο ανάκαμψης	∩	$(8/3)e^{-4/3}$ καμπή	∪	

Το διάγραμμα της f έχει σησμείο καμπής το $M\left(e^{2/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3}\right)$ και σημείο ανάκαμψης το (1,0)



● **Σημείο ανάκαμψης**

Γωνιακό σημείο, στο οποίο αλλάζει η κυρτότητα του διαγράμματος

γ) Για $1 \le x \le e^2$ έχουμε $0 \le f(x) \le \frac{2}{e}$, οπότε

$$\int_1^{e^2} f(x)dx \le \frac{2}{e}(e^2 - 1) = 2\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

ΘΕΜΑ 207

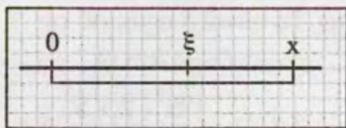
Αν για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ να αποδείξετε ότι

α) $\frac{1}{x}F(x) > F'(x)$ για κάθε $x > 0$ και

β) Εάν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτο την ευθεία $y = 2$ στο $+\infty$ τότε το $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 2$.

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στη συνάρτηση F στο διάστημα [0, x]. Υπάρχει λοιπόν $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε



$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x}$ αλλά $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ άρα υπάρχει $\xi \in (0, x)$:

$F'(\xi) = \frac{F(x)}{x}$. Έχουμε όμως $f'(x) < 0$ $\forall x \ge 0$ κατά συνέπεια η f είναι αυ-

στηρά φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και επειδή $F'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$, η $F'(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ άρα

$F'(\xi) > F'(x) \Leftrightarrow \dfrac{F(x)}{x} > F'(x), \ \forall x > 0.$

β) Εφόσον η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτο την $y = 2$ στο $+\infty$ συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Από το (α) ερώτημα έχουμε

$\dfrac{F(x)}{x} > F'(x) \Leftrightarrow F(x) > xf(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (xf(x)) = +\infty \cdot 2 = +\infty$. Έχουμε λοιπόν για το ζητούμενο όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ με $F(x)$ και x παραγωγίσιμες οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital θα είναι:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F'(x)}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2.$

ΘΕΜΑ 208

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

β) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+2} f(t)dt$.

ΛΥΣΗ

α) Το σύνολο ορισμού της f είναι $A = (-\infty, -3/2] \cup (1, +\infty)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $A' = (-\infty, -3/2) \cup (1, +\infty)$. Έχουμε

$f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-2+5}{x-1}} = \sqrt{2 + \dfrac{5}{x-1}}$ οπότε

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+\dfrac{5}{x-1}}}\left(2+\frac{5}{x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2+\dfrac{5}{x-1}}}\left(-\frac{5}{(x-1)^2}\right) < 0, \ \forall x \in A'$$

άρα η f είναι αυστηρά φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -3/2]$ και $(1, +\infty)$.

β) Η f είναι αυστηρά φθίνουσα στο $[x, x+1]$ συνεπώς

$$f(x+1)(x+2-x) \le \int_{x}^{x+2} f(t)dt \le f(x)(x+2-x) \quad \text{και} \quad f(x+1) = \sqrt{\frac{2x+5}{x}}$$

με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x}} = \sqrt{2}$ όπως και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} = \sqrt{2}$. Οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} 2f(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2f(x) = 2\sqrt{2}$

και με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{x}^{x+2} f(t)dt = 2\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 209

Δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x) = \int_{1}^{x} \left[\ln\frac{x}{t} \int_{1}^{t} e^{u}du \right] dt$ να δείξετε ότι

$\forall\, x > 0,\ \Phi'(x) + x\Phi''(x) = e^{x} - e.$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\Phi(x) = \int_{1}^{x} \left[(\ln x - \ln t) \int_{1}^{t} e^{u}du \right] dt =$

$$= \int_{1}^{x} \left[\ln x \int_{1}^{t} e^{u}du \right] dt - \int_{1}^{x} \left[\ln t \int_{1}^{t} e^{u}du \right] dt =$$

$$= \ln x \int_{1}^{x} \left(\int_{1}^{x} e^{u}du \right) dt - \int_{1}^{x} \left[\ln t \int_{1}^{t} e^{u}du \right] dt$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη $\forall\, x > 0$. Είναι

$$\Phi'(x) = (\ln x)' \int_{1}^{x} \left(\int_{1}^{t} e^{u}du \right) dt + \ln x \left(\int_{1}^{x} \left(\int_{1}^{t} e^{u}du \right) dt \right)' - \left(\int_{1}^{x} \left[\ln t \int_{1}^{t} e^{u}du \right] dt \right)' =$$

$$= \frac{1}{x} \int_{1}^{x} \left(\int_{1}^{t} e^{u}du \right) dt + \ln x \int_{1}^{x} e^{u}du - \ln x \int_{1}^{x} e^{u}du =$$

$= \frac{1}{x}\int_1^x \left(\int_1^t e^u du\right) dt$. Οπότε για $x > 0$ έχουμε $x\Phi'(x) = \int_1^x \left(\int_1^t e^u du\right) dt$ και

παραγωγίζοντας παίρνουμε $\Phi'(x) + x\Phi''(x) = \int_1^x e^u du$ δηλαδή

$\Phi'(x) + x\Phi''(x) = e^x - e$.

ΘΕΜΑ 210

Έστω f, g συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο IR και τέτοιες ώστε να είναι $f(0) = 1$ και

$$2f(x)g(x) = \int_0^x \left[f^2(t) + g^2(t) + (f'(t))^2 + (g'(t))^2\right] dt \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι θα έχουμε και $f^2(x) - g^2(x) = 1$.

ΛΥΣΗ

Παραγωγίζουμε τα μέλη της (1) και έχουμε

$2f'(x)g(x) + 2f(x)g'(x) = f^2(x) + g^2(x) + [f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα και

$$[f(x) - g'(x)]^2 + [g(x) - f'(x)]^2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι

$$f'(x) = g(x) \text{ και } g'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

οπότε

$$\frac{d}{dx}[f^2(x) - g^2(x)] = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2f(x)g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Θα είναι λοιπόν $f^2(x) - g^2(x) = c =$ σταθ. για $x \in \mathbb{R}$.

Εύρεση της σταθεράς c

Θέτοντας $x = 0$, βρίσκουμε $c = f^2(0) - g^2(0) = 1 - g^2(0)$. Για $x = 0$ όμως, παίρνουμε από την (1) $2f(0)g(0) = 0$, οπότε $g(0) = 0$, αφού $f(0) = 1$.
Προκύπτει $c = f^2(0) - g^2(0) = 1 - 0 = 1$ και τελικά $f^2(x) - g^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 211

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 4^{-x}$.

▶



Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τις τιμές του x για τις οποίες είναι $f(x) \le 1$ καθώς και εκείνες για τις οποίες έχουμε $f(x) \ge 1$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^4 \max(4^x, x^4)\,dx$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f'(x) = 4x^3 4^{-x} - x^4 4^{-x}\ln 4 \ \forall\, x \in [0, 4]$ οπότε $f'(x) = x^3 4^{-x}(4 - x\ln 4) \ \forall\, x \in [0, 4]$. Θα έχουμε λοιπόν $f'(x) = 0$ για $x = \xi = \dfrac{4}{\ln 4}$ ενώ $f'(x) > 0$ για $0 \le x < \xi$ και $f'(x) < 0$ για $\xi < x \le 4$.

Είναι φανερό ότι είναι $\xi < 4$, αφού $\ln 4 > \ln e = 1$. Είναι επίσης $\xi > 2$, δηλαδή $\dfrac{4}{\ln 4} > 2$, δηλ. $2\ln 4 < 4$, αφού είναι $\ln 4 < 2$ και τούτο διότι $2 = \ln(e^2) > \ln 4$.

Η μεταβολή της f στο διάστημα [0, 4] φαίνεται στον επόμενο πίνακα

x	0	2	ξ	4
f΄(x)	+		0	−
f(x)	↗		$f_{max} = f(\xi)$	↘

Έχουμε όμως $f(2) = 2^4 4^{-2} = 1$ και $f(4) = 4^4 4^{-4} = 1$. Θα είναι λοιπόν $f(x) \ge 1$ για $2 \le x \le 4$ και $0 < f(x) \le 1$ για $0 \le x \le 2$.

β) Για $0 \le x \le 2$ έχουμε $x^4 4^{-x} \le 1$, δηλαδή $x^4 \le 4^x$ και για $2 \le x \le 4$ έχουμε επίσης $x^4 \ge 4^x$. Άρα λοιπόν

$$I = \int_0^2 4^x dx + \int_2^4 x^4 dx = \left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^2 + \left(\frac{x^5}{5}\right)_2^4 = \frac{16-1}{\ln 4} + \frac{1}{5}(4^5 - 2^5) = \frac{15}{\ln 4} + \frac{1}{5}(1024-32)$$

και τελικά $I = \dfrac{15}{\ln 4} + \dfrac{992}{5}$.

ΘΕΜΑ 212

Έστω $f: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ με την επόμενη ιδιότητα:



►

Αν θεωρήσουμε σαν ανεξάρτητη μεταβλητή την $\xi = \int_0^x f(t)dt$ η νέα έκφραση της συνάρτησης είναι $e^{-\xi}$. Να βρείτε τον τύπο f(x).

ΛΥΣΗ

Ο τύπο $e^{-\xi}$ πρέπει με την αντικατάσταση $\xi = \int_0^x f(t)dt$ να μετατρέπεται στον τύπο f(x) της συνάρτησης, να έχουμε δηλαδή

$$e^{-\int_0^x f(t)dt} = f(x) \quad \forall\, x \geq 0 \quad (1)$$

Είναι όμως $f(x) > 0 \;\; \forall\, x > 0$ και έχουμε $f(x) = e^{\ln f(x)}$ $(x > 0)$.

Η (1) γίνεται $-\int_0^x f(t)dt = \ln f(x) \quad \forall\, x \geq 0$.

Παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$-f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \;\; \forall\, x > 0$ και $1 = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} \;\; \forall\, x \geq 0$ και τελικά

$\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = (x)' \;\; \forall\, x \geq 0$ οπότε $\dfrac{1}{f(x)} = x + c$ για $x \geq 0$ (2)

Για $x = 0$, βρίσκουμε από την (1) $f(0) = e^0 = 1$ και από την (2)

$\dfrac{1}{f(0)} = c$, οπότε $c = 1$ και έχουμε $\dfrac{1}{f(x)} = x + 1 \;\; \forall\, x \geq 0$ και τελικά

$f(x) = \dfrac{1}{x+1} \;\; \forall\, x \geq 0$.

ΘΕΜΑ 213

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f: [0, 1] → |R, συνεχής στο διάστημα [0, 1]. Να δείξετε ότι θα έχουμε

$$\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx \quad (1)$$



▶

β) Με τη βοήθεια του πρώτου συμπεράσματος (ή με άλλο τρόπο) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

ΛΥΣΗ

α) Μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της (1) θέτοντας $x = \pi - t$. Είναι τότε $\eta\mu x = \eta\mu(\pi - t) = \eta\mu t$, ενώ $dx = -dt$ και έχουμε

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\eta\mu t)(-dt) = \int_0^{\pi} (\pi - t)f(\eta\mu t)dt.$$

Άρα λοιπόν, $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu t)\,dt - \int_0^{\pi} tf(\eta\mu t)dt$

δηλαδή $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx - \int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx$

οπότε $2\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx$ και τελικά

είναι $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f((\eta\mu x)dx.$

β) Το ολοκλήρωμα I γράφεται $I = \int_0^{\pi} x\frac{\eta\mu x}{2-\eta\mu^2 x}dx$ και είναι της μορφής

$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx$ με $f(\eta\mu x) = \frac{\eta\mu x}{2-\eta\mu^2 x}$.

Σύμφωνα λοιπόν με το συμπέρασμα του πρώτου ερωτήματος, θα έχουμε

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu x\,dx}{2-\eta\mu^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{-d(\sigma\upsilon\nu x)}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Θέτουμε $t = \sigma\upsilon\nu x$ και έχουμε

$$I = -\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Θέτουμε τώρα $t = εφu$, οπότε $dt = (1 + εφ^2u)du = (1 + t^2)du$ και

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{(1+t^2)}{1+t^2}du = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} du = \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

ΘΕΜΑ 214

α) Να δείξετε ότι για να έχουμε

$$α + βημx + γσυνx = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (α, β, γ \in \mathbb{R})$$

πρέπει και αρκεί να είναι $α = β = γ = 0$.

β) Να βρείτε τις σταθερές $α, β \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι

$$3ημx + 5συνx = xf(x) + βf'(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3ημx + 5συνx}{ημx + συνx}dx$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι είναι $α + βημx + γσυνx = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ (1)

Παραγωγίζουμε ως προς x και έχουμε $βσυνx - γημx = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ (2)

Για $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$, προκύπτει αντίστοιχα $β = 0$ και $γ = 0$ οπότε, από την (1) παίρνουμε και $α = 0$.

Αντίστροφα, είναι προφανές ότι αν $α = β = γ = 0$, ισχύει η (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Είναι $αf(x) + βf'(x) = α(ημx + συνx) + β(συνx - ημx) =$

$= (α - β)ημx + (α + β)συνx \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

και η αντίστοιχη συνθήκη γίνεται

$(3 - α + β)ημx + (5 - α - β)συνx = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

Η τελευταία, ισχύει τότε και μόνο, όταν είναι $3 - α + β = 0$ και $5 - α - β = 0$ και βρίσκουμε $α = 4$, $β = 1$.

γ) Είναι $I = \int_0^{\pi/2} \frac{4f(x) + f'(x)}{f(x)}dx = 4\int_0^{\pi/2} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ οπότε

$$I = 2\pi + \left[\ln|f(x)|\right]_0^{\pi/2} = 2\pi + \ln f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln f(0) = 2\pi.$$

ΘΕΜΑ 215

α) Να βρεθούν οι σταθερές α, β ώστε να έχουμε

$$3 + 4\eta\mu x + 7\sigma\upsilon\nu x = \alpha f(x) + \beta f'(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

όπου $f(x) - 1 + 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3 + 4\eta\mu x + 7\sigma\upsilon\nu x}{1 + 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ $(x \in \mathbb{R})$ και η (1) γίνεται

$3 + 4\eta\mu x + 7\sigma\upsilon\nu x = \alpha(1 + 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + \beta(2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

δηλαδή $(3 - \alpha) + (4 - 2\alpha + \beta)\eta\mu x + (7 - \alpha - 2\beta)\sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Προς τούτο, πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha=3$ και $4-2\alpha+\beta=0$ και $7 - \alpha - 2\beta = 0$ οπότε βρίσκουμε $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.

β) Είναι $3 + 4\eta\mu x + 7\sigma\upsilon\nu x = \alpha f(x) + \beta f'(x) = 3f(x) + 2f'(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ και άρα

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3f(x) + 2f'(x)}{f(x)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \left|3 + 2\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right| dx \text{ και}$$

$$I = 3\int_0^{\pi/2} dx + 2\int_0^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = 3\,\frac{\pi}{2} = 2\left[\ln|f(x)|\right]_0^{\pi/2} \text{ δηλαδή}$$

$$I = \frac{3\pi}{2} + 2\,[\ln 3 - \ln 2] = \frac{3\pi}{2} + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 216 ΑΣΕΠ 2000

α) Έστω f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] (α < β).
Να δείξετε ότι είναι

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha + \beta - x)\,dx \quad (1)$$

►

▶

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1 + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}\right)dx$$

ΛΥΣΗ

α) Μετασχηματίζουμε το δεύτερο μέλος της (1) με την αντικατάσταση $t = \alpha+\beta-x$.
Θα έχουμε $dt = -dx$, οπότε

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx = \int_\beta^\alpha f(t)(-dt) = \int_\alpha^\beta f(t)dt \text{ οπότε}$$

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

β) Εφαρμόζουμε το συμπέρασμα (1) στο ολοκλήρωμα I και παίρνουμε

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}\right)dx \text{ αφού } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$$

Συμπεραίνουμε ότι είναι

$$2I = I + I = \int_0^{\pi/2} \left[\ln\left(\frac{1 + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}\right) + \ln\left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}\right)\right]dx \text{ δηλαδή}$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln 1\, dx = 0. \text{ Είναι λοιπόν } I = 0.$$

ΘΕΜΑ 217 ΑΣΕΠ 1998

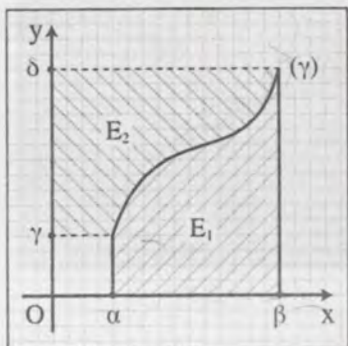
Έστω f συνάρτηση συνεχής και αυστηρώς αύξουσα και θετική στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ όπου $0 < \alpha < \beta$ και $f(\alpha) = \gamma$, $f(\beta) = \delta$ με $0 < \gamma < \delta$.

Να χρησιμοποιήσετε τη γεωμετρική σημασία του ολοκληρώματος και να δείξετε ότι ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\gamma^\delta f^{-1}(x)dx = \beta\delta - \alpha\gamma$$

ΛΥΣΗ

Έστω (γ) το διάγραμμα της f. Τότε, η (γ) είναι επίσης και διάγραμμα της συνάρτησης με τύπο $f^{-1}(y) = g(y)$ με ανεξάρτητη μεταβλητή y και σύνολο ορισμού το διάστημα $[\gamma, \delta]$ του άξονα y΄y.



Είναι λοιπόν

$$\varepsilon_1 = \int_\alpha^\beta f(x)dx \text{ και}$$

$$\varepsilon_2 = \int_\gamma^\delta f^{-1}(y)dy.$$ Όμως στο ορισμένο ολοκλήρωμα επιτρέπεται πάντοτε η αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης.

● Το πρόβλημα ξεκαθαρίζει ένα σημείο, μάλλον σκοτεινό για πολλούς υποψηφίους. Είναι γνωστό ότι για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης της f(x), λύνουμε ως προς x την εξίσωση $y = f(x)$ και έστω ότι βρίσκουμε $x = g(y)$ τότε g(y) είναι ο τύπος της αντίστροφης, με ανεξάρτητη μεταβλητή y. Για τη συγκριτική μελέτη των δύο συναρτήσεων, τις αναφέρουμε με την ίδια ανεξάρτητη μεταβλητή x και γράφουμε $f^{-1}(x) = g(x)$. Τελικά το διάγραμμα της $f^{-1}(x)$ είναι το συμμετρικό εκείνου της f ως προς τη διχοτόμο $y = x$. Τούτο όμως οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων απεικονίζεται στον ίδιο άξονα x΄x. Αν όμως κρατήσουμε για την αντίστροφη συνάρτηση g ανεξάρτητη μεταβλητή το y και το σύνολο ορισμού της το απεικονίσουμε, σε τμήμα του y΄y, το διάγραμμα της $f^{-1} = g$ αποτελείται από την ίδια καμπύλη, του αρχικού διαγράμματος της f.

Είναι λοιπόν $\varepsilon_2 = \int_\gamma^\delta f^{-1}(x)dx$, οπότε έχουμε

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\gamma^\delta f^{-1}(x)dx = \beta\delta - \alpha\gamma.$$

ΘΕΜΑ 218

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και τέτοιοι ώστε να είναι

$|f'(x)| \le M \;\; \forall\, x \in [\alpha, \beta]$. Έστω $M > 0$ (1)



▶

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g_1 με τύπο $f(x) - Mx$ είναι αυστηρώς φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση g_2 με τύπο $f(x) + Mx$ αυστηρώς αύξουσα για $x \in [\alpha, \beta]$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$ είναι

$$-M(t-\alpha) \le f(t) \le M(t-\alpha)$$

γ) Να συμπεράνετε ότι είναι

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \le \frac{M(\beta-\alpha)^2}{2}$$

ΛΥΣΗ

α) Η (1) γίνεται $-M \le f'(x) \le M \ \ \forall x \in [\alpha, \beta]$ οπότε

$(f(x) - Mx)' \le 0 \ \ \forall x \in [\alpha, \beta]$ και

$(f(x) + Mx)' \ge 0 \ \ \forall x \in [\alpha, \beta]$

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g_1 με τύπο $g_1(x) = f(x) - Mx$ είναι φθίνουσα ενώ η συνάρτηση g_2 με τύπο $g_2(x) = f(x) + Mx$ αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.

β) Για κάθε t με $\alpha \le t \le \beta$ θα είναι $g_1(\alpha) \ge g_1(t)$ και $g_2(\alpha) \le g_2(t)$, οπότε

$-M\alpha \ge f(t) - Mt$ και $M\alpha \le f(t) + Mt$ άρα λοιπόν

$f(t) \le M(t-\alpha)$ και $-M(t-\alpha) \le f(t) \ \ \forall t \in [\alpha, \beta] \quad (2).$

γ) Ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (2) στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, βρίσκουμε

$$-M\left[\frac{(t-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta \le \int_\alpha^\beta f(t)dt \le M\left[\frac{(t-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta \quad \text{δηλαδή}$$

$$\frac{-M(\beta-\alpha)^2}{2} \le \int_\alpha^\beta f(t)dt \le M\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \quad \text{και τελικά} \quad \left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right| \le M\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

ΘΕΜΑ 219

Έστω $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο:

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{f(x)f'(t-x)\,dx}{[f(x) + f(t-x)]^2} \ \ \forall t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

▶



Να δείξετε ότι η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι

$$\Phi'(0)=\frac{f'(0)}{4f(0)}$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $t-x=u$, οπότε $-dx=du$ και $\Phi(t)=\int_t^0 \frac{f(t-u)f'(u)}{[f(t-u)+f(u)]^2}(-du)$

δηλαδή $\Phi(t)=\int_0^t \frac{f(t-u)f'(u)}{[f(t-u)+f(u)]^2}du \quad (2)$

Από τις (1) και (2) (προσθέτοντας κατά μέλη) προκύπτει

$$2\Phi(t)=\int_0^t \frac{f'(x)f(t-x)+f(x)f'(t-x)}{[f(x)+f(t-x)]^2}dx \text{ δηλαδή}$$

$$2\Phi(t)=\int_0^t \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{f(x)+f(t-x)}\right]dx=\left[\frac{f(x)}{f(x)+f(t-x)}\right]_0^t=$$

$$=\frac{f(t)}{f(t)+f(0)}-\frac{f(0)}{f(0)+f(t)}=\frac{f(t)-f(0)}{f(t)+f(0)}$$

και τελικά $\Phi(t)=\frac{1}{2}\frac{f(t)-f(0)}{f(t)+f(0)} \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

Προκύπτει ότι θα είναι

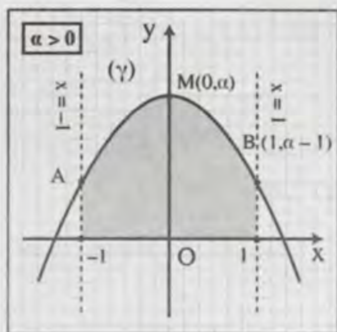
$\Phi'(t)=\frac{f'(t)f(0)}{[f(t)+f(0)]^2} \quad \forall t\in\mathbb{R}$ και $\Phi'(0)=\frac{f'(0)}{4f(0)}$.

ΘΕΜΑ 220

Να βρείτε την τιμή του α ($\alpha\in\mathbb{R}$) για την οποία το εμβαδό της περιοχής του επιπέδου που βρίσκεται ανάμεσα στο διάγραμμα της συνάρτησης με τύπο $f(x)=\alpha-x^2$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$, είναι ίσο με 4/3.

ΛΥΣΗ

Το διάγραμμα (γ) της συνάρτησης f, τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο M(0, α) και τις ευθείες x = –1 και x = 1 στα σημεία A(–1, α – 1) και B(1, α – 1) αντίστοιχα.

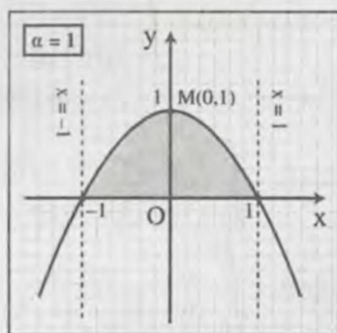


Παρατηρούμε ότι για τη μορφή του τύπου και την αντίστοιχη έκφραση του εμβαδού, υπάρχουν οι τρεις επόμενες δυνατότητες:

α) α ≥ 1 (περίπτωση I)

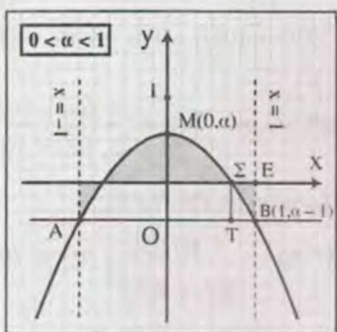
Το τμήμα του διαγράμματος (γ) το μεταξύ των ευθειών x = –1 και x = 1, βρίσκεται ολόκληρο πάνω από τον άξονα x΄x. Έχουμε λοιπόν

$$\varepsilon = \int_{-1}^{1} (\alpha - x)^2 dx = 2\alpha - \frac{2}{3}$$



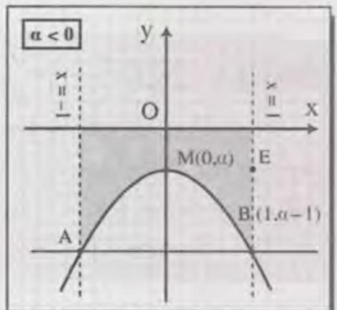
Η συνθήκη $\varepsilon = \frac{4}{3}$ γίνεται $2\alpha - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ και αληθεύει για α = 1. (Η μορφή της περιοχής για α=1, φαίνεται στο σχ.2).

β) 0 < α < 1 Το διάγραμμα (γ) τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο $\Sigma(x_0, 0)$ με $0 < x_0 < 1$ και το αντίστοιχο εμβαδό είναι αυτό της περιοχής του σχ.3. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη (γ) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, άρα η σκιασμένη περιχή ΣΕΒ περιέχεται μέσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΣΕΒ. Το εμβαδό της είναι μικρότερο του εμβαδού του τριγώνου τούτου, άρα και του τριγώνου ΣΤΒ, οπότε και του τραπεζίου ΟΣΒΚ. Το εμβαδό ε της σκιασμένης (συνολικά) περιοχής είναι μικρότερο από το εμβαδό της περιοχής ΑΜΒΚΑ που είναι ίσο με 4/3. Άρα, δεν υπάρχει τιμή του α, με 0 < α < 1 για την οποία να είναι ε = 4/3.



γ) α < 0 (βλ. σχ. 4)

Είναι τότε $\varepsilon = -\int_{-1}^{1} (\alpha - x^2)dx$ δηλαδή



$\varepsilon = -\left[\alpha x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\left(2\alpha - \dfrac{2}{3}\right)$ και $\varepsilon = \dfrac{2}{3} - 2\alpha$. Η συνθήκη $\varepsilon = \dfrac{4}{3}$ γίνεται τότε

$\dfrac{2}{3} - 2\alpha = \dfrac{4}{3}$ και βρίσκουμε $\alpha = -\dfrac{1}{3}$. Συμπεραίνουμε τελικά ότι έχουμε $\varepsilon = \dfrac{4}{3}$

τότε και μόνο, όταν είναι $\alpha = 1$ είτε $\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ 221

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε να είναι

$$\int_0^x f(t)dt = x + \int_0^x (t-x)f(t)dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να δείξετε ότι είναι $f(0) = 1$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση f.

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε τα δύο μέλη της (1) είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

β) Παραγωγίζουμε τα μέλη της (1) ως προς x και έχουμε

$$f(x) = 1 + \frac{d}{dx}\left[\int_0^x t\,f(t)dt - x\int_0^x f(t)dt\right] \text{ δηλαδή}$$

$$f(x) = 1 + xf(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ άρα και } f(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt \quad (2)$$

Συμπεραίνουμε ότι είναι $f(0) = 1$ και ότι $\dfrac{d}{dx}f(x) = -\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

δηλαδή $f'(x) = -f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) + f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Προκύπτει ότι είναι και $e^x f'(x) + e^x f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ δηλαδή ότι

$[e^x f(x)]' = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ και άρα $e^x f(x) = c = \text{σταθ.}$

Για $x = 0$, βρίσκουμε $f(0) = c$, οπότε $c = 1$ και είναι $f(x) = e^{-x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε αντίστροφα, ότι για $f(x) = e^{-x}$, τα μέλη της (2) έχουν ίσες τιμές για $x = 0$ και ίσες παραγώγους στο $\mathbb{R}$, άρα η (2) ισχύει $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Τούτο σημαίνει ότι τα μέλη της (1) έχουν ίσες παραγώγους στο $\mathbb{R}$. Έχουν όμως και ίσες τιμές για $x = 0$. Άρα η (1) ισχύει $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 222

Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής σ' αυτό.
Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$$\int_{\alpha}^{x_1} f(x)dx = (\beta - x_1)f(x_1) \quad \text{και} \quad \int_{x_2}^{\beta} f(x)\,dx = (x_2 - \alpha)f(x_2)$$

ΛΥΣΗ

Για το πρώτο ζητούμενο αρκεί ν.δ.ο η εξίσωση $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = (\beta - x)f(x)$ να έχει ρίζα στο (α, β) ισοδύναμα η

$$(\beta - x)f(x) - \int_{\alpha}^{x} f(t)dt = 0$$

ή

● Οδηγούμαστε στην εύρεση μιας βοηθητικής συνάρτησης στην οποία να εφαρμόζεται το θ. Rolle και αυτό γιατί υπάρχει γινόμενο πρωτοβάθμιας που η παράγωγος είναι -1 και η $f(x)$ είναι παράγωγος της

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

Έχουμε δηλαδή τη μορφή

$$(\beta - x)F'(x) - F(x) = 0$$

$$(\beta - x)\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' + (\beta - x)' \int_{\alpha}^{x} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \left((\beta - x)\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = 0$$

Κατά συνέπεια επιλέγουμε ως βοηθητική συνάρτηση την $\Phi(x) = (\beta - x)\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, στο $[\alpha, \beta]$ άρα και συνεχής με $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta) = 0$. Υπάρχει λοιπόν $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\Phi'(x_1) = 0$, αλλά $\Phi'(x) = -\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + (\beta - x)f(x)$ οπότε $\exists\, x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\int_{\alpha}^{x_1} f(t)\,dt = (\beta - x_1)f(x_1)$

Όμοια για το δεύτερο ζητούμενο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = (x - \alpha)\int_{x}^{\beta} f(t)dt$ στην οποία εφαρμόζεται το θ. Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ αφού $G(\alpha) = G(\beta) = 0$

και συνεπώς $\exists\, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $G'(x_2) = 0$, αλλά

$$G'(x) = \int_x^\beta f(t)dt + (x-\alpha)\left(\int_x^\beta f(t)dt\right)' =$$

$$= \int_x^\beta f(t)dt + (x-\alpha)\left(-\int_\beta^x f(t)dt\right)' = \int_x^\beta f(t)dt - (x-\alpha)f(x)$$

οπότε $\exists\, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\int_{x_2}^\beta f(t)dt = (x_2 - \alpha)f(x_2)$

ΘΕΜΑ 223

Να δείξετε ότι αν f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$\int_\alpha^\xi (\xi^2 + 1)e^{f(t)}dt = \int_\xi^\beta (t^2 + 1)e^{f(\xi)}dt \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Η (1) είναι ισοδύναμη με την $(\xi^2 + 1)\int_\alpha^\xi e^{f(t)}dt = e^{f(\xi)}\int_\xi^\beta (t^2 + 1)dt$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $e^{f(x)}\int_x^\beta (t^2 + 1)dt - (x^2 + 1)\int_\alpha^x e^{f(t)}dt = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) ισοδύναμα η

$$\left(\int_\alpha^x e^{f(t)}dt\right)'\int_x^\beta (t^2 + 1)dt + \left(\int_x^\beta (t^2 + 1)dt\right)'\int_\alpha^x e^{f(t)}dt = 0 \Leftrightarrow$$

$\left(\int_\alpha^x e^{f(t)}dt \int_x^\beta (t^2 + 1)dt\right)' = 0$. Επομένως αρκεί να έχει μία τουλάχιστον ρίζα η παράγωγος της $\Phi(x) = \int_\alpha^x e^{f(t)}dt \int_x^\beta (t^2 + 1)dt$. Προς τούτο αρκεί να εφαρμόζεται το θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ για την $\Phi(x)$. Η $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη σαν γινόμενο πα-

ραγωγισίμων συναρτήσεων και $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta) = 0$ συνεπώς εφαρμόζεται το θ. Rolle δηλαδή. $\exists\, \xi \in (\alpha, \beta)$: $\Phi'(\xi) = 0$ και ισοδύναμα η ζητούμενη.

ΘΕΜΑ 224

Εάν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f(0) = 0$ και $2f'(x) + 5f(x) = 7$ (1)

α) Να βρεθεί η f

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $y'y$ και τις ευθείες $y = \frac{7}{5}$ και $x = 2$.

γ) Να βρεθεί το όριο $\displaystyle\int_x^{x+5} f(x)dx$ όταν το $x \to +\infty$.

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ισοδυναμεί με την $f'(x) + \frac{5}{2} f(x) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{5x/2} + \frac{5}{2} e^{5x/2} f(x) = \frac{7}{2} e^{5x/2} \Leftrightarrow$$

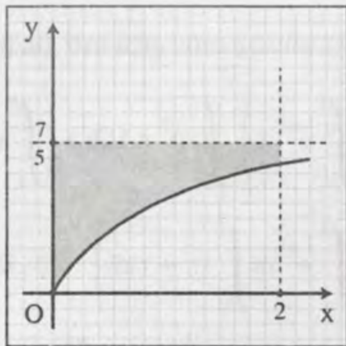
$$\Leftrightarrow \left(f(x)\, e^{5x/2}\right)' = \left(\frac{7}{5} e^{5x/2}\right)' \text{ άρα}$$

γενικά εάν έχουμε τη μορφή $f'(x) + \kappa f(x) = \lambda$ μπορούμε να βρούμε την παράγουσα πολλαπλασιάζοντας με το e^x.

$f(x)e^{5x/2} = \frac{7}{5} e^{5x/2} + c$ αλλά $f(0) = 0$ οπότε $c = -\frac{7}{5}$.

Η $f(x) = \frac{7}{5} - \frac{7}{5} e^{-5x/2} = \frac{7}{5}\left(1 - e^{-5x/2}\right)$.

β) Έχουμε για κάθε $x \in [0, 2]$, $0 \le f(x) < \frac{7}{5}$ οπότε το εμβαδό που περικλείεται από τον $y'y$, την $x = 2$, την $y = \frac{7}{5}$ και την C_f θα είναι



$$\varepsilon = \int_0^2 \left[\frac{7}{5} - f(x)\right] dx \text{ αλλά από την (1)}$$

$f(x) = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} f'(x)$ οπότε

$$\varepsilon = \frac{2}{5}\int_0^2 f'(x)dx = \frac{2}{5}\left[f(x)\right]_0^2 = \frac{2}{5} f(2) = \frac{2}{5}\,\frac{7}{5}\,(1 - e^{-5}) = \frac{14}{25}\left(1 - \frac{1}{e^5}\right) \text{ τετρ. μον.}$$

γ) Από το Θ.Μ.Τ. του ολοκληρωτικού λογισμού στο $[x, x+5]$ έχουμε: υπάρχει $\xi \in [x, x+5]$ τέτοιο ώστε $\int_x^{x+5} f(x)dx = (x+5-x)f(\xi) = 5f(\xi)$ και επειδή $x \leq \xi \leq x+5$ για $x \to +\infty$ θα έχουμε και $\xi \to +\infty$. Συνεπώς

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+5} f(x)dx = 5 \lim_{\xi \to +\infty} f(\xi) = 5 \lim_{\xi \to +\infty} \left[\frac{7}{5} - e^{-5\xi/2}\right] = 7 - 5 \lim_{\xi \to +\infty} e^{-5\xi/2} = 7$$

διότι $e^{-5\xi/2} \to 0$.

ΘΕΜΑ 225

α) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(4-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\int_{2-x}^{2+x} f(t)dt = 2\int_2^{2+x} f(t)dt = 2\int_{2-x}^{2} fd(t)dt$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^4 |x-2|\sqrt{x^2-4x+6}\,dx$.

ΛΥΣΗ

α) $I = \int_{2-x}^{2+x} f(t)dt = \int_{2-x}^{2} f(t)dt + \int_2^{2+x} f(t)dt =$

$= -\int_{2+x}^{2} f(4-y)dy + \int_2^{2+x} f(t)dt =$

$= \int_2^{2+x} f(y)dy + \int_2^{2+x} f(t)dt = 2\int_2^{2+x} f(t)dt$.

Θέτουμε $t = 4 - y$ οπότε
$dt = -dy$ και
όταν $t = 2$ έχουμε $y = 2$,
όταν $t = 2 - x$ έχουμε $y = 2 + x$

Επίσης εφόσον $I = \int_{2-x}^{2} f(t)dt + \int_2^{2+x} f(t)dt$ και $\int_2^{2+x} f(t)dt = \frac{1}{2}I$

θα έχουμε $\int_{2-x}^{2} f(t)dt = I - \frac{1}{2}I \Leftrightarrow 2\int_{2-x}^{2} f(t)dt = I$.

β) Έχουμε $f(x)=|x-2|\sqrt{x^2-4x+6}$ και

$f(4-x)=|4-x-2|\sqrt{(4-x)^2-4(4-x)+6}=|x-2|\sqrt{x^2-4x+6}$.

Άρα $\int_0^4 f(x)dx=2\int_0^2 f(x)dx=-\int_0^2 (2x-4)\left(x^2-4x+6\right)^{1/2}dx=$

$=-\left[\frac{2}{3}(x^2-4x+6)^{3/2}\right]_0^2=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{(2^2-4\cdot 2+6)^3}-\sqrt{6^3}\right)=$

$=\frac{2}{3}(-2\sqrt{2}+6\sqrt{6})=\frac{4}{3}(3\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

ΘΕΜΑ 226

α) Να βρεθεί συνάρτηση $g(x)=f'(x)+f(x)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$ (1) $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

β) Να βρείτε το $I_0=\int_0^1 xe^{-x}dx$. Αν $I_\nu=\int_0^{\frac{1}{2^\nu}} xe^{-2^\nu x}dx$ να δείξετε ότι

$I_{\nu+1}=\frac{1}{4}I_\nu$.

ΛΥΣΗ

Η σχέση (1) γράφεται $f''(x)+f'(x)+f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f''(x)e^x+f'(x)e^x+f'(x)e^x+f(x)e^x=0 \Leftrightarrow (f'(x)e^x)'+(f(x)e^x)'=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f'(x)e^x+f(x)e^x)'=0$ άρα $f'(x)e^x+f(x)e^x=\alpha$ (2), α σταθερά.
Αλλά $f'(0)=1$ και $f(0)=0$ και από την (2) για $x=0$ έχουμε $\alpha=1$. Άρα $f'(x)e^x+f(x)e^x=1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)'=(x)'$ και κατά συνέπεια $f(x)e^x=x+c$, θέτοντας $x=0$ παίρνουμε $c=0$ άρα $f(x)e^x=x \Leftrightarrow f(x)=xe^{-x}$ με $f'(x)=(1-x)e^{-x}$.

Άρα $I_0=\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 [f''(x)+2f'(x)]dx=-[f'(x)+2f(x)]_0^1=$

$=-\left[(1-x)e^{-x}+2xe^{-x}\right]_0^1=-\left[(x+1)e^{-x}\right]_0^1=-\frac{2}{e}+1=1-\frac{2}{e}$. $I_\nu=\int_0^{\frac{1}{2^\nu}} xe^{-2^\nu x}dx$

Θέτουμε $2^\nu x=y \Leftrightarrow x=\frac{1}{2^\nu}y$ και $dx=\frac{1}{2^\nu}dy$ οπότε για $x=0$ είναι $y=0$ και για $x=\frac{1}{2^\nu}$ είναι $y=1$.

Άρα $I_\nu = \int_0^1 \frac{1}{2^\nu} y e^{-y} \frac{1}{2^\nu} dy = \frac{1}{2^{2\nu}} I_0$ και για $\nu+1$ γίνεται

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2^{2(\nu+1)}} I_0 = \frac{1}{2^{2\nu} 2^2} I_0 = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{2\nu}} I_0 = \frac{1}{4} I_\nu .$$

ΘΕΜΑ 227

Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_1^e x^2 (\ln x)^\nu dx,\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να υπολογίσετε το I_1.

β) Να δείξετε ότι $I_{\nu+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{\nu+1}{3} I_\nu$.

γ) Να υπολογιστούν τα I_2 και I_3.

ΛΥΣΗ

α) $$I_\nu = \int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}.$$

β) Αρκεί ν.δ.ο $3I_{\nu+1} + (\nu+1) I_\nu = e^3$.

$$3I_{\nu+1} + (\nu+1) I_\nu = 3 \int_1^e x^2 (\ln x)^{\nu+1} dx + (\nu+1) \int_1^e x^2 (\ln x)^\nu dx =$$

$$= \int_1^e \left[(x^3)' (\ln x)^{\nu+1} + (\nu+1) x^3 \frac{1}{x} (\ln x)^\nu\right] dx = \int_1^e \left[(x^3)' (\ln x)^{\nu+1} + x^3 \left((\ln x)^{\nu+1}\right)'\right] dx$$

$$= \int_1^e \left(x^3 (\ln x)^{\nu+1}\right)' dx = \left[x^3 (\ln x)^{\nu+1}\right]_1^e = e^3.$$

γ) $$I_2 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} I_1 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \frac{2e^3+1}{9} = \frac{5e^3-2}{27}$$

$$I_3 = \frac{e^3}{3} - I_2 = \frac{e^3}{3} - \frac{5e^3-2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}.$$

ΘΕΜΑ 228

Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\eta\mu x}dx$ για $\nu \in \mathbb{N}^*$ και

$$I_0 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\eta\mu x}dx.$$

α) Να υπολογιστεί το $I_{\nu+2} - I_\nu$ συναρτήσει του ν.

β) Να βρεθούν τα I_1, I_3, I_5.

γ) Να δείξετε ότι $\left(\ln\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\eta\mu x}$.

δ) Να βρεθούν τα I_0, I_2, I_4.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $I_{\nu+2} - I_\nu = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu+2}x}{\eta\mu x}dx - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\eta\mu x}dx = -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)}{\eta\mu x}dx =$

$$-\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x\,\eta\mu^2 x}{\eta\mu x}dx = -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^\nu x\,\eta\mu x\,dx$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = y$ οπότε $-\eta\mu x dx = dy$.
Όταν $x = \pi/3$ τότε $y = 1/2$
και $x = \pi/2$ τότε $y = 0$

Άρα $I_{\nu+2} - I_\nu = -\int_0^{1/2} y^\nu dy = -\left[\frac{y^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{(\nu+1)\,2^{\nu+1}}$.

β) $I_1 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx = \left[\ln(\eta\mu x)\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Από το α) ερώτημα για $\nu = 1$ παίρνουμε

$I_3 - I_1 = -\frac{1}{2\cdot 2^2} = -\frac{1}{2^3}$ άρα $I_3 = I_1 - \frac{1}{2^3} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2^3}$.

Επίσης για $\nu = 3$ έχουμε $I_5 - I_3 = -\frac{1}{4\cdot 2^4}$ άρα $I_5 = I_3 - \frac{1}{2^6} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^6}$.

γ) Είναι $\left(\ln\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)' = \dfrac{\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)'}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\,\eta\mu\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\eta\mu x}$.

δ) $I_0 = \displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\eta\mu x}\,dx$, από το γ) ερώτημα, είναι $I_0 = \left[\ln\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} =$

$= \ln 1 - \ln\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{3} = -\ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$.

Από το α) ερώτημα για $\nu = 0$ παίρνουμε

$I_2 - I_0 = -\frac{1}{2}$ οπότε $I_2 = I_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}$.

Επίσης για $\nu = 2$ θα είναι $I_4 - I_2 = -\frac{1}{3\cdot 2^3}$ και $I_4 = I_2 - \frac{1}{3\cdot 2^3} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3}$.

ΘΕΜΑ 229

α) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Εάν $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}[f(t+1) - f(t)]\,dt = \ell$.

β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}\left[\frac{t}{t+1}\ln(t+1) - \frac{1}{t}\ln t\right]dt$.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{x+1}[f(t+1) - f(t)]dt$ για την οποία ισχύει το Θ.Μ.Τ. του ολοκληρωτικού λογισμού. Άρα υπάρχει $\xi \in [x, x+1]$ τέτοιο ώστε

$\Phi(x) = [f(\xi+1) - f(\xi)]\,(x + 1 - x) = f(\xi+1) - f(\xi)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi, \xi+1]$ άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ, του διαφορικού λογισμού (Θ. Lagrange) οπότε υπάρχει

$t \in (\xi, \xi+1)$: $f'(t) = \dfrac{f(\xi+1) - f(\xi)}{\xi + 1 - \xi} = f(\xi+1) - f(\xi)$ αλλά $x \le \xi \le x+1$ και

$\xi < t < \xi + 1$ συνεπώς όταν $x \to +\infty$ έχουμε $\xi \to +\infty$ και $t \to +\infty$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(\xi+1)-f(\xi)]=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(t)=\ell$.

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}[f(t+1)-f(t)]dt=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\ell$.

β) Για $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\left[\dfrac{1}{t+1}\ln(t+1)-\dfrac{1}{t}\ln t\right]dt=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}[f(t+1)-f(t)]\,dt$. Είναι $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=0.$$

Συνεπώς με βάση το α) ερώτημα συμπεραίνουμε ότι και

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\left[\frac{1}{t+1}\ln(t+1)-\frac{1}{t}\ln t\right]dt=0.$$

ΘΕΜΑ 230

α) Να δείξετε ότι το (μέγιστο) σύνολο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

είναι το $\mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιττή στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι έχουμε $f(x)\geq x^2$ για κάθε $x\geq 0$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό της περιοχής που περιέχει ακριβώς τα σημεία (x, y) του επιπέδου με

$$0\leq x\leq\frac{3}{4}\ \text{και}\ x^2\leq y\leq f(x)$$

ΛΥΣΗ

α) Θα δείξουμε ότι είναι $x+\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό όμως είναι φανερό για $x\geq 0$.

Ισχύει όμως $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=-x^2+x^2+1=1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

οπότε για $x<0$ είναι $x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{-x+\sqrt{x^2+1}}>0$ αφού $-x>0$.

Η συνάρτηση f έχει προφανώς (μέγιστο) σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι δε συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Τέλος $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(-x) = -x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) =$$
$$= -x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -x\sqrt{1+x^2} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f(x)$$

Είναι λοιπόν $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και η f είναι περιττή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$

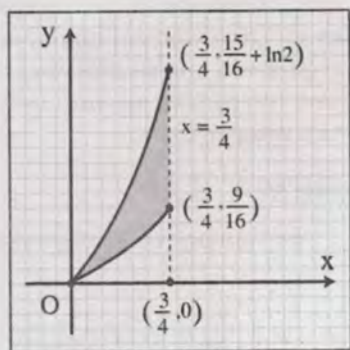
$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

οπότε προκύπτει $f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \dfrac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} = 2\sqrt{1+x^2}$.

Συμπεραίνουμε ότι για $x \geq 0$ είναι $f'(x) > 2\sqrt{x^2} = 2x$ οπότε

$[f(x) - x^2]' = f'(x) - 2x > 0$ για $x \geq 0$. Η συνάρτηση με τύπο $f(x) - x^2$ είναι λοιπόν αυστηρώς αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ οπότε για $x > 0$ έχουμε: $f(0) < f(x) - x^2$ και αφού $f(0) = 0$ θα έχουμε $f(x) > x^2$ $\forall x > 0$ και $f(x) \geq x^2$ για $x \geq 0$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με:



$$E = \int_0^{3/4} [f(x) - x^2]dx = \int_0^{3/4} f(x)dx - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{3/4} =$$
$$= \int_0^{3/4} f(x)dx - \frac{9}{64}.$$

Είναι όμως $\displaystyle\int_0^{3/4} f(x)dx =$

$$\int_0^{3/4} x\sqrt{1+x^2}\,dx + \int_0^{3/4} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = I_1 + I_2.$$

Ισχύει
$$\int_\alpha^\beta f^\nu(x)f'(x)dx = \left[\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]_\alpha^\beta$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα I_1 βρίσκουμε

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{3/4}(1+x^2)^{1/2}(1+x^2)'dx=\frac{1}{2}\left[\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{3/4}=\frac{1}{3}\left(\frac{125}{64}-1\right)=\frac{61}{192}.$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση στο I_2, βρίσκουμε

$$I_2=\int_0^{3/4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)(x')dx=\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^{3/4}-\int_0^{3/4}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

αφού είναι $\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Είναι λοιπόν

$$I_2=\frac{3}{4}\ln2-\frac{1}{2}\int_0^{3/4}(1+x^2)^{-1/2}(1+x^2)'dx=\frac{3}{4}\ln2-\frac{1}{2}\left[\frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^{3/4}$$

δηλαδή $I_2=\frac{3}{4}\ln2-\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^{3/4}=\frac{3}{4}\ln2-\frac{5}{4}+1=\frac{1}{4}(\ln8-1).$

Το εμβαδό Ε βρίσκεται τελικά ίσο με:

$$E=I_1+I_2-\frac{9}{64}=\frac{61}{192}+\frac{1}{4}\ln8-\frac{1}{4}-\frac{9}{64}\ \text{δηλαδή}\ E=\frac{1}{4}\ln8-\frac{7}{96}.$$

● **Το επόμενο πρόβλημα προσφέρεται για μια ικανοποιητική επανάληψη, σ' ότι αφορά την έννοια και τις ιδιότητες της αντίστροφης συνάρτησης, ιδιαίτερα σ' ότι αφορά την παραγώγιση της αντίστροφης συνάρτησης. Ταυτόχρονα, αναφέρεται η εύρεση του συνόλου τιμών συνάρτησης, η μελέτης της μεταβολής της κ.λ.π. Τέλος, υπενθυμίζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων που ορίζονται με ολοκλήρωμα και η μελέτη της αρτιότητας τούτων.**

ΘΕΜΑ 231

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{\varepsilon\varphi x}\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

α) Να δείξετε ότι είναι $f'(x)=\frac{1+f^4(x)}{2f(x)}\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και ότι η f έχει άπειρη παράγωγο για $x=0$. Ποια η αντίστοιχη γεωμετρική σημασία;

β) Να μελετήσετε τη μεταβολή της f για $0\le x<\frac{\pi}{2}$, και να κατασκευάσετε αντίστοιχο πίνακα μεταβολής. Να χαράξετε το αντίστοιχο διάγραμμα (γ) της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ενδεχόμενες ασύμπτωτες του διαγράμματος τούτου. ▶

▶
γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση και ότι για την αντίστροφη συνάρτηση g της f, ισχύει $g'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$ $\forall x>0$.

Να χαράξετε το διάγραμμα (c) της g.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{2t\,dt}{1+t^4}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η φ είναι άρτια και να χαράξετε το διάγραμμά της.

ΛΥΣΗ

α) ● Για $0<x<\frac{\pi}{2}$ έχουμε $\varepsilon\varphi x>0$, οπότε, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης για σύνθετες συναρτήσεις, είναι

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}}(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}}=\frac{1+f^4(x)}{2f(x)}\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

● Για την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0=0$, θεωρούμε τον αντίστοιχο λόγο μεταβολής $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{\varepsilon\varphi x}}{x}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x^2}}$ για $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Έχουμε όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{2x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ (κανόνας του Hospital)

οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$. Η f έχει λοιπόν άπειρη παράγωγο για $x=0$ (Δεν είναι παραγωγίσιμη με τη στενή σημασία του όρου). Επειδή είναι συνεχής για $x=0$ επίσης, συμπεραίνουμε ότι το διάγραμμα (γ) της f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο σημείο O(0, 0).

β) ● Η f είναι συνεχής για $0\le x<\frac{\pi}{2}$ και έχουμε

$$f'(x)=\frac{1+f^4(x)}{2f(x)}>0 \text{ για } 0<x<\frac{\pi}{2}$$

Είναι λοιπόν αυστηρώς αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Παραγωγίζουμε τώρα τα μέλη της ισότητας $f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{f(x)}+f^3(x)\right]$ $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και έχουμε

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)}+3f^2(x)f'(x)\right]\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$ δηλαδή

$$f''(x)=\frac{f'(x)}{2f^2(x)}[3f^4(x)-1]=\frac{f'(x)}{2f^2(x)}[3\varepsilon\varphi^2x-1].$$ Είναι λοιπόν $f''(x)=0$

για $\varepsilon\varphi x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ δηλ. για $x=\frac{\pi}{6}$ καθώς και $f''(x)<0$ για $0<x<\frac{\pi}{6}$ και

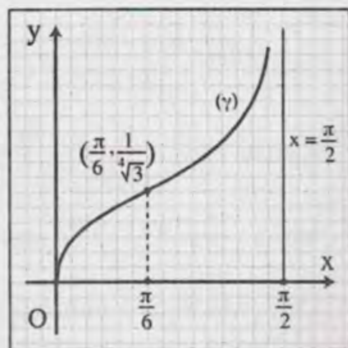
$f''(x)>0$ για $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$.

Η μεταβολή της f στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και το αντίστοιχο σημείο καμπής φαίνονται στον επόμενο πίνακα

x	0		π/6		π/2
$f''(x)$		−	0	+	
$f'(x)$			+		
f(x)	0	⌒	σημείο καμπής ↗	⌣	+∞

● **Διάγραμμα της f**

Το διάγραμμα (γ) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ και παρουσιάζει καμπή για $x=\frac{\pi}{6}$, στρέφει δε τα κοίλα προς τα κάτω για $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ και προς τα άνω για $\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}$.



● **Σύνολο τιμών.** Αφού $f(0)=0$ και $\lim_{x\to\pi/2}f(x)=+\infty$ και η f είναι αύξουσα και συνεχής, το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$.

γ) ● Η f είναι αυστηρώς αύξουσα, άρα 1–1 και επομένως αντιστρέψιμη. Έστω ότι είναι $g=f^{-1}$. Τότε, το σύνολο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$. Η g είναι επίσης συνεχής και αυστηρώς αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Έστω τώρα τυχαίο σημείο x με $x>0$ και $t=g(x)$.

● Θυμίζουμε ότι αν είναι A το σύνολο ορισμού και B το σύνολο τιμών της αντιστρέψιμης συνάρτησης f, η αντίστροφη συνάρτηση $g=f^{-1}$ έχει σύνολο ορισμού το B και σύνολο τιμών το A.

Τότε $x = f(t)$ με $0 < t < \frac{\pi}{2}$ και είναι

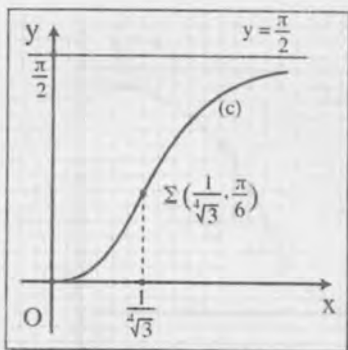
$$g'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{2f(t)}{1 + f^4(t)} = \frac{2x}{1 + x^4}.$$

Είναι λοιπόν $g'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$ $\forall\, x > 0$.

● **Διάγραμμα της $g = f^{-1}$**

Είναι συμμετρικό του διαγράμματος (γ) της f ως προς τη διχοτόμο $y = x$ των αξόνων.

Έχει σημείο καμπής το $\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{\pi}{6}\right)$ και οριζόντια ασύμπτωτο (για $x \to +\infty$) την ευθεία $y = \pi/2$.



Κάθε τιμή του συνόλου ορισμού Β της $g = f^{-1}$ γράφεται κατά ένα και μόνο τρόπο στη μορφή $x = f(t)$ με $t \in A$, όπου $t = g(x)$.

● **Συνέχεια μονοτονία**

Είναι γνωστό ότι αν η f είναι συνεχής στο Α τότε η $g = f^{-1}$ είναι συνεχής στο Β. Επίσης, αν η f είναι αυστηρώς αύξουσα (φθίνουσα) στο Α, τότε και η $g = f^{-1}$ είναι επίσης αυστηρώς αύξουσα (φθίνουσα) στο Β.

● Τέλος, αν x σημείο του συνόλου ορισμού Β της $g = f^{-1}$ και είναι $x = f(t)$ με $t \in A$ είναι δε η f παραγωγίσιμη στο t με $f'(t) \neq 0$, τότε είναι

$$g'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(g(x))}$$

δ) ● Η συνάρτηση με τύπο $\frac{2x}{1 + x^4}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε (σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα) η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(x) = \int_0^x \frac{2t\,dt}{1 + t^4}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχουμε $\varphi'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Είναι όμως και $g'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$ $\forall\, x > 0$. Άρα για $x > 0$, οι συναρτήσεις g και φ διαφέρουν κατά σταθερά c, είναι δηλαδή $\varphi(x) - g(x) = c$ $\forall\, x > 0$ και ακόμα είναι $\varphi(x) - g(x) = c$, $\forall\, x \geq 0$, αφού φ, g είναι συνεχείς για $x = 0$. Είναι όμως $g(0) = 0$ και $\varphi(0) = 0$, οπότε και $c = 0$.

Θα έχουμε $\varphi(x) = g(x)$ $\forall\, x \geq 0$.

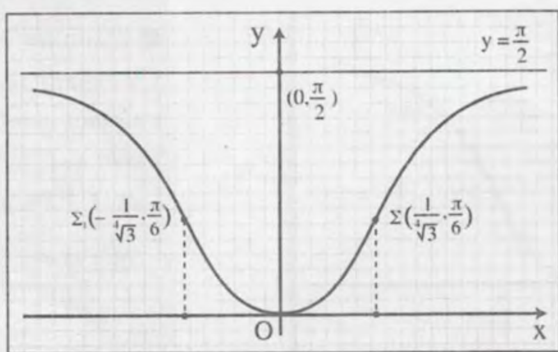
● **Αρτιότητα της φ.** Το ολοκλήρωμα $\int_0^x \frac{2t\,dt}{1+t^4} = \int_0^x \frac{d(t^2)}{1+t^4}$ με την αλλαγή

μεταβλητής $t^2 = u$ γίνεται $\varphi(x) = \int_0^{x^2} \frac{du}{1+u^4}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Βρίσκουμε λοιπόν $\varphi(-x) = \int_0^{x^2} \frac{du}{1+u^2} = \varphi(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Η φ είναι άρτια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Το διάγραμμά της, συμπίπτει για $x \geq 0$ με το διάγραμμα της $g = f^{-1}$ και για $x < 0$ είναι το συμμετρικό τούτου ως προς τον άξονα $y'y$.

● **Διάγραμμα της φ**



ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. **i)** Έστω Α πίνακας τύπου μxμ τέτοιος ώστε $A^2 = O$. Να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν

α) $(I + A)^\nu = I + \nu A$, **β)** $A(I + A)^\nu A$

ii) Να δείξετε ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} -99 & 200 & 300 \\ 100 & -199 & -300 \\ -100 & 200 & 301 \end{bmatrix}.$$

2. Έστω Α πίνακας 3x3, τέτοιος ώστε να είναι $X^T AX = O$ για κάθε πίνακα X τύπου 3x1. Να δείξετε ότι είναι $A^T = -A$ και ότι ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος.

3. Έστω Α ένας νxν πίνακας τέτοιος ώστε $A^4 = 16I$.
Αν οι πίνακες $A + 2$ και $A^2 + 4I$ είναι αντιστρέψιμοι να δείξετε ότι
α) $A = 2I$, **β)** $I + A + A^2 + ... + A^{1995} = (2^{1996} - 1)\,I$.

4. Έστω Α, Β πίνακες τύπου 2x2 τέτοιοι ώστε οι πίνακες Α, Α + Β, Α + 2Β, Α + 3Β, Α + 4Β να έχουν ως στοιχεία ακέραιους αριθμούς, να είναι αντιστρέψιμοι και οι αντίστροφοι αυτών να έχουν επίσης ως στοιχεία ακέραιους. Να δείξετε ότι ο πίνακας Α + 5Β έχει τις ίδιες ιδιότητες.

(Putman Δεκ. 1994)

5. Έστω Α ένας πίνακας τύπου 2x2.
α) Αν οι αριθμοί x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $|A - xI| = 0$ να δείξετε ότι $x_1 x_2 = |A|$.
β) Αν το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του Α είναι μηδέν να δείξετε ότι
i) $|A| \le 0$, όταν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, **ii)** $|A| \ge 0$, όταν $x_1, x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6. Αν οι εξισώσεις $\alpha_1 t^3 + \beta_1 t^2 + \gamma_1 t + \delta_1 = 0$, $\alpha_2 t^3 + \beta_2 t^2 + \gamma_2 t + \delta_2 = 0$, $\alpha_3 t^3 + \beta_3 t^2 + \gamma_3 t + \delta_3 = 0$, έχουν κοινή λύση να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}^3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}.$$

7. **i)** Να δείξετε ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα Α ισχύει $|A^\nu| = |A|^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

ii) Αν A είναι ένας 2x2 πίνακας και $A^ρ = \begin{bmatrix} 1 & ρ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ όπου ρ σταθερός θετικός ακέραιος, τότε με τη βοήθεια της ισότητας $A^ρA = AA^ρ$ να δείξετε ότι

α) Ο πίνακας A είναι της μορφής $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$

β) Αν $x > 0$ να βρείτε τον πίνακα A.

8. Έστω A ένας πίνακας τύπου 3x3 τέτοιος ώστε $A^3 = O$. Να δείξετε ότι

i) Οι πίνακες $B = (I + A)^2 - A$ και $Γ = (I - A)^2 + A$ είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθούν οι αντίστροφοί τους.

ii) Οι πίνακες $B - Γ$ και $B^2 - Γ^2$ δεν είναι αντιστρέψιμοι.

iii) Ο πίνακας $B + Γ$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο $(B + Γ)^{-1}$.

9. Αν (x_0, y_0, z_0) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x - y + (λ-1)z = 0 \\ (λ-1)x + 2y - z = 0 \\ x + y - λz = 0, \; λ \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (Σ) \text{ να δείξετε ότι } \begin{vmatrix} z_0 & z_0 & z_0 \\ y_0 & x_0 & x_0 \\ x_0 & y_0 & x_0 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Να βρείτε τις τιμές των $β, γ \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} (\ln α)x + (α-1)y = β + α \\ x + (α-1)y = γ - α \end{cases}$$ να είναι συμβιβαστό για κάθε $α > 0$.

11. Αν οι ισχύουν οι σχέσεις $αx + βy - κ = 0$ και $γx + δy - λ = 0$ μόνο όταν $x = \begin{vmatrix} κ & β \\ λ & δ \end{vmatrix}$ και $y = \begin{vmatrix} α & κ \\ γ & λ \end{vmatrix}$ να δείξετε ότι $αδ = 1 + βγ$.

12. Αν $ακ + βλ + γμ = γκ + αλ + βμ = βκ + γλ + αμ$ να δείξετε ότι ένα τουλάχιστον από τα συστήματα

$$\begin{cases} αx + γy + βω = 0 \\ βx + αy + γω = 0 \\ γx + βy + αω = 0 \end{cases} (Σ) \text{ και } \begin{cases} κx + λy + μω = 0 \\ μx + κy + λω = 0 \\ λx + μy + κω = 0 \end{cases} (Σ')$$

έχει και μη μηδενικές λύσεις $(x, y, ω)$.

13. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, G το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ και σημείο Ε τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BΓ}$. Αν η GE τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ να δείξετε ότι

i) $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AΓ}$, **ii)** $\overrightarrow{GK} = 4\overrightarrow{GE}$.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MΓ}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MΓ}|.$$

15. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του επιπέδου με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}, |\vec{\gamma}| = 2$ καθώς επίσης $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 90°$ και $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 150°$. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$.

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}) = 60°$. Αν $\vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $|\vec{\delta}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και στη συνέχεια να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\delta}})$.

17. **i)** Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha}$

ii) Αν ισχύει $(\vec{\alpha}\vec{\beta})^2 = \left[|\vec{\alpha}|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right]\left[|\vec{\beta}|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right]$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

18. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του επιπέδου για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = \frac{1}{3}$, $|\vec{\beta}| = 1$, $|\vec{\gamma}| = \frac{\sqrt{43}}{9}$ και $0 < (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) < \frac{\pi}{2}$.

ii) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

ii) Αν για το διάνυσμα $\vec{\delta}$ ισχύουν $\vec{\delta} \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{\beta} \perp (3\vec{\alpha} - \vec{\delta})$ να εκφράσετε το $\vec{\delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

19. **i)** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - (\lambda^2 + 1)x + (\lambda^2 + 1)y + \lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παράλληλες μεταξύ τους για κάθε τιμή του $\lambda \in (1, +\infty)$

ii) Να βρείτε την τιμή του λ έτσι ώστε το εμβαδό ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ε_1 και ε_2 να είναι ίσο με 2.

20. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x - 2y + 2 = 0$ και ε_2: $x - y - 1 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ορίζει με τις (ε_1), (ε_2) ισοσκελές τρίγωνο του οποίου οι ίσες πλευρές βρίσκονται πάνω στις (ε_1), (ε_2).

21. Οι πλευρές τριγώνου ΑΒΓ έχουν εξισώσεις $\alpha x - \beta y = 0$, $\alpha x + \beta y = 0$ και $\alpha x + \beta y\eta\mu\theta = \alpha\beta\sigma\upsilon\nu\theta$ όπου είναι $\alpha\beta \neq 0$ και $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Να δείξετε ότι το εμβαδό Ε του τριγώνου, είναι ίσο με $E = |\alpha\beta|$.

22. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας ε: $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$ και του άξονα $x'x$ στο σημείο $O(0, 0)$.

23. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x = -2$ και ε_2: $x = 2$.

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c) που εφάπτεται της (ε_1) καθώς επίσης και του άξονα $y'y$ στο σημείο $O(0, 0)$.

ii) Ένα σημείο Μ κινείται στην ευθεία (ε_2). Από το σημείο αυτό φέρνουμε τις δύο ευθείες που εφάπτονται του (c) και τέμνουν την (ε_1) στα σημεία Κ, Λ. Να δείξετε ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΚΛΜ είναι σταθερό.

24. Δίνεται η παραβολή c: $x^2 = 4y$. Μεταβλητή ευθεία στρέφεται γύρω από την εστία της (c) και τέμνει την παραβολή στα σημεία Α και Β.

Να δείξετε ότι το $\dfrac{1}{(EA)} + \dfrac{1}{(EB)}$ είναι σταθερό.

25. Τα σημεία Α, Β κινούνται πάνω στους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$ αντίστοιχα έτσι ώστε $(AB) = 4$. Να βρείτε την καμπύλη στην οποία κινούνται τα σημεία Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MB} = 3\,\overrightarrow{AM}$.

26. Δίνεται η έλλειψη c: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ $(\alpha > \beta)$ με εστίες τα σημεία $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ καθώς επίσης και το σημείο $K\left(\gamma, \dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)$ αυτής. Αν Ρ είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Οψ τέτοιο ώστε $PK \perp PE'$ να δείξετε ότι η ευθεία ΡΚ εφάπτεται στην έλλειψη (c).

27. i) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης να δείξετε ότι $P(A \cap B) \geq P(A) - P(B')$.

ii) Αν $A_1, A_2, \ldots$ Αν είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης να δείξετε ότι $\nu + P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu) \geq 1 + P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

28. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $w = \dfrac{z-1}{z+i}$. Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ημιευθεία $Arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ να βρείτε την καμπύλη στην οποία κινείται η εικόνα του w.

29. Έστω $f(z) = z^2 + Az + B$ όπου $A, B \in \mathbb{C}$ πολυώνυμο τέτοιο ώστε $\forall\, z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ να είναι $|f(z)| = 1$.
Να δείξετε ότι θα είαι τότε $A = B = 0$.

30. Θεωρούμε τα σημεία M(z) του κύκλου $|z| = 1$ (c) του μιγαδικού επιπέδου. Να βρείτε σε ποια από αυτά τα σημεία παίρνει τη μέγιστη τιμή της η παράσταση $f(z) = |z^3 - z + 2|$ και ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή.

31. α) Να δείξετε ότι για $z \in \mathbb{C}$ είναι $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| < 1$ τότε και μόνο, όταν $I_m(z) < 0$.

β) Έστω ότι για τους αριθμούς $z_1, z_2, ..., z_\nu \in \mathbb{C}$ ισχύει

(1) $\left|\dfrac{z_1+i}{z_1-i}\right| + \left|\dfrac{z_2+i}{z_2-i}\right| + ... + \left|\dfrac{z_\nu+i}{z_\nu-i}\right| < 1$ και $z = z_1 + z_2 + ... + z_\nu$.

Να δείξετε ότι θα είναι και $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| < 1$.

32. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 3x + 1 & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ x^2 + \beta x + 1 & \text{αν } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

α) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

β) Να βρεθεί για ποιο σημείο $x_0 \in (-1, 1)$ είναι $f'(x_0) = 0$.

33. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 με $f(x_0) = 0$ και τέτοια ώστε και η συνάρτηση με τύπο $g(x) = |f(x)|$ να είναι επίσης παραγωγίσιμη στο x_0 όπου x_0 εσωτερικό σημείο του A. Να δείξετε ότι είναι $f'(x_0) = 0$.

34. Δίνεται συνάρτηση $\Phi(x) = \dfrac{\eta\mu\pi x}{x(1-x)}$, $0 < x < 1$.

α) Να δείξετε ότι η Φ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ και αυστηρώς φθίνουσα στο $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\varkappa \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = \varkappa$ τέμνει τη γραφική παράσταση της Φ.

35. Εάν το γράφημα της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτο την ευθεία με εξίσωση $y = \dfrac{x}{2} + 2$

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 f(x) - x^3 - 6x^2 - x\ln x^2}{x f(x) + \ln x + x^2}$

β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

36. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x-\gamma}{x+2}$ με $\alpha\neq 0$ και $4\alpha-2\beta\neq\gamma$, α, β, γ πραγματικές σταθερές και $x\neq -2$.

α) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει ασύμπτωτο και στο $+\infty$ (και στο $-\infty$) την ευθεία $y=2x+3$ και να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=-1$.

β) Για ποιες τιμές του κ η ευθεία $y=\kappa$ τέμνει την C_f (γραφική παράσταση της f) σε δύο σημεία και για ποιες τιμές εφάπτεται σ' αυτήν.

γ) Για $\lambda>0$ να δείξετε ότι οι ευθείες $y=\lambda+3$ και $y=-\lambda-5$ τέμνουν την C_f σε 4 σημεία που είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

δ) Εάν ο ρυθμός αύξησης του λ με $\lambda>0$ είναι 2μον./sec να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης της πλευράς του παραλληλογράμμου που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=\lambda+3$ όταν $\lambda=4$.

37. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)>0$ $\forall x\in[0,1]$, $f(0)=1$, $f(1)=e$, $f'''(x)>0$ $\forall x\in[0,1]$ και η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0,1]$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,1)$ στο οποίο η εφαπτόμενη στο $(x_0, f(x_0))$ της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=f(x_0)x+\kappa$.

38. Να βρεθεί για δεδομένο $\alpha>0$, το πλήθος των θετικών λύσεων της εξίσωσης $x^\alpha=e^x$. Για ποια τιμή του α η εξίσωση έχει μία και μόνο λύση;

39. **α)** Έστω $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν είναι $f(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=|f(x)|$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι $g'(x_0)=f'(x_0)$ αν $f(x_0)>0$, ενώ $g'(x_0)=-f(x_0)$ αν $f(x_0)<0$.

β) Αν είναι $f(x_0)=0$, και οι συναρτήσεις f και g είναι και οι δύο παραγωγίσιμες στο x_0, να δείξετε ότι θα είναι $f'(x_0)=g'(x_0)=0$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση g, με τύπο $g(x)=|\lambda-\eta\mu x|$.

40. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{\alpha x^2+4x+\beta}{x^2+\gamma x+12}$ έχει ασύμπτωτο ευθεία τον άξονα $x'x$ και σημείο καμπής το $K(0,1)$.

41. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-2)e^x+x+2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη μεταβολή της f για $x\in\mathbb{R}$ και

β) Να δείξετε ότι είναι $(x-2)e^x+x+2>0$ $\forall x>0$.

42. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f: (0, 2) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$f(x) = x^4 - 8x + 4x\ln x - \frac{2}{\pi} ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad \forall\, x \in (0, 2)$.

43. Έστω $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, συνάρτηση παραγωγίσιμη για $x = 0$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in (-1, 1)$ να είναι $f(0) = 2$ και $|f(x)| \le \alpha^x + \beta^x$ (1).
Να δείξετε ότι είναι $f'(0) = 0$ και $\alpha\beta = 1$.

44. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[x_0, x_0 + 2]$ τέτοια ώστε $f(x_0) = -5$ και $f(x_0 + 2) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $x_0 < \xi_1 < \xi_2 < x_0 + 2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 9$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \alpha x^2 + \beta$.

α) Να καθοριστούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι στο $x_0 = 1$ η C_f, γραφική παράσταση της f, έχει σημείο καμπής το $M(1, f(1))$. Να δείξετε ότι το M είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ όπου $f(x_1)$, $f(x_2)$ τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$.

β) Να δείξετε ότι το εμβαδό που περικλείεται από την C_f και τη χορδή της AM ισούται με το εμβαδό που περικλείεται από την C_f και την MB.

46. α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ στο $(0, 0)$ και ότι κάθε ευθεία $y = \lambda x$ με $\lambda > 1$ έχει εκτός του $(0, 0)$ άλλα δύο κοινά σημεία με την C_f συμμετρικά ως προς το $(0, 0)$.

β) Βρείτε την τιμή της f στο $1/2$ και παρατηρήστε ότι το $\left(\frac{1}{2}, \ln\sqrt{3}\right)$ είναι κοινό σημείο της C_f και της ευθείας $y = \ln 3^x$, κατόπιν να βρείτε το εμβαδό που περικλείεται από την C_f και την ευθεία $y = \ln 3^x$.

47. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x\sqrt{1-x}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, $-f$ και g.

48. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 & αν\ x > 0 \\ 0 & αν\ x = 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ για $x > 0$. Επίσης να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ενδεχόμενα ακρότατα της f.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ και να εξηγήσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

γ) Να βρείτε το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται ανάμεσα στο διάγραμμα (γ) της f και την ευθεία $y = x$.

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη (Τ) στο σημείο $M\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ και να δείξετε ότι για $x > \frac{1}{e}$ το διάγραμμα (γ) βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (Τ)

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4e^{-x} + 3x + 1$.

α) Να βρεθεί η ασύμπτωτος στο $+\infty$.

β) Να βρεθεί το όριο του εμβαδού που περικλείεται από το γράφημα της f(x), την ασύμπτωτό της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = t$ και $x = t^2$ καθώς το $t \to +\infty$.

50. Να υπολογίσετε εφαρμόζοντας διαδοχικά δύο φορές τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha) = \int_1^{\alpha} \text{συν}(\ln x)dx \quad (\text{για } \alpha > 0)$$

51. α) Να βρεθεί η ασύμπτωτος της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = e^{-x}\text{ημ}x + x$.

β) Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f(x) την ασύμπτωτο και τις ευθείες $x = 2\pi\nu$ και $x = 2\pi(\nu + 1)$.

52. Εάν η f είναι συνάρτηση που το γράφημά της έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = x + 4$ και κάθε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 1$, βρίσκεται ψηλότερα από το $N(x_0, y_0)$ κατά $\frac{\ln x_0^2}{x_0}$ να βρείτε το όριο του εμβαδού που περικλείεται από το γράφημά της, την ασύμπτωτό της και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \alpha + 1$ όταν $\alpha \to +\infty$.

53. α) Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}$, της ασυμπτώτου της στο $+\infty$ και των ευθειών $x = \alpha^2$ και $x = \alpha^2 + 1$, $\alpha \neq 0$. Ποια η τιμή του για $\alpha = 1$.

β) Να βρεθεί το όριο αυτού του εμβαδού όταν $\alpha \to -\infty$.

54. Αν για τη συνεχή συνάρτηση στο $(-1, +\infty)$ ισχύει

i) $2\int_0^x f(t)dt - 3\ln(x+1) \geq x^2 + \alpha x, \quad \forall\, x > -1$ και

ii) τέμνει τον $y'y$ στο $M(0, 2)$, να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

55. α) Να υπολογίσετε για $x \in \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα $\int_1^x 2te^{t^2+1}dt$

β) Με τη βοήθεια κατάλληλης παραγοντικής ολοκλήρωσης να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα $\int_1^x 2t^3 e^{t^2+1}dt \;\; (x \in \mathbb{R})$.

56. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας και μόνο θετικός αριθμός α, τέτοιος ώστε για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση f το πολύ βαθμού 3, να είναι:

$$\int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{3}\left[P\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\right]$$

57. Έστω f συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ και τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες του διαγράμματος της f στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ να είναι κάθετες ενώ η εφαπτομένη στο B σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω, με $\eta\mu 2\omega = \frac{2}{5}$. Να δείξετε ότι θα είναι

$$\int_\alpha^\beta f''(x)dx = 5.$$

58. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε να είναι

$$f(x) + \int_0^x tf(t)dt = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι είναι $e^{x^2/2}f(x) = c = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

59. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να είναι

$$f^2(x) = \int_0^x \left[f^2(t) + (f'(t))^2\right] dt + 1995$$

60. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα

β) Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t(x-1)}dt$.

61. Έστω f: [α, β] f: → IR συνάρτηση συνεχής στο [α, β] (α < β) και της οποίας το διάγραμμα, στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο [α, β].
Να δείξετε ότι θα είναι και

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \le (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

62. Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\left[\ln^2(t+1)-\ln^2 t\right]dt$.

Κυκλοφορούν ακόμη

εξετάσεις 93

Θ.Ν.Καζαντζής
Ελένη Μήτσιου



Θεσσαλονίκη

Διαγωνίσματα

επανάληψη

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Χ. Βαφειάδης

Μαθηματικά

- περίληψη θεωρίας
- λυμένα θέματα
- λυμένα προβλήματα
- διαγωνίσματα με τις λύσεις τους

εξετάσεις 94

Θ. Ν. Καζαντζής
Ελένη Μήτσιου

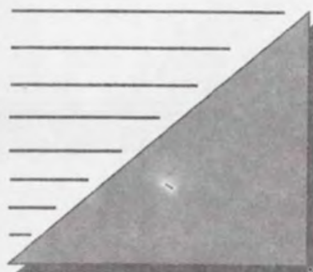


Θεσσαλονίκη

Προβλήματα

επανάληψη

εκδόσεις: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Χ. Βαφειάδης



ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΓΕΩΡΓΑΚΙΛΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

για την επανάληψη της 4ης Δέσμης

Περιέχει :
- Λυμένα θέματα από όλη την ύλη
- Διαγωνίσματα με τις λύσεις τους στα πρότυπα των γενικών εξετάσων
- Τα θέματα των γενικών εξετάσεων των τελευταίων ετών

στο δρόμο σας για την επιτυχία

6' έκδοση συμπληρωμένη

Θεσσαλονίκη Μάρτης 1995

εκδόσεις: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ Χ. Βαφειάδης

ΣΕΙΡΑ

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Θ. Ν. Καζαντζή



Ολοκληρώματα

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ Χ. ΒΑΦΕΙΑΔΗΣ

σειρά: ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

- εξετάσεις '93
Διαγωνίσματα - επανάληψη

- εξετάσεις '94
Προβλήματα - επανάληψη

- εξετάσεις '95
Θέματα - επανάληψη